

基于 Hoke-Brown 准则的深埋圆形透水隧洞弹塑性分析*

欧阳宇峰¹, 刘成学²

(1. 深圳市市政设计研究院有限公司, 广东 深圳 518029; 2. 深圳市地铁集团有限公司, 广东 深圳 518026)

摘要:针对深埋圆形隧洞轴对称问题, 将 Hoke-Brown 准则方程代入考虑渗透体积力影响的平衡微分方程进行求解, 得到关于塑性区洞周应力的隐式方程, 通过求解超越方程得到塑性区洞周应力数值解; 再考虑应力重分布影响, 利用塑性区半径处应力连续条件得到弹性区岩体应力数值解。将该解答与基于 Mohr-Coulomb 准则的解答进行了比较。结果表明, 两种准则条件下岩体应力分布规律相似。采用 Hoke-Brown 准则计算时, 塑性区较小, 径向应力绝对值较大, 塑性区环向应力也较大; 采用 Mohr-Coulomb 准则计算时, 塑性区较大, 径向应力绝对值较小, 塑性区环向应力也较小。在内外水头比值较小时, 按 Mohr-Coulomb 准则求得的峰值应力较按 Hoke-Brown 准则求得值大, 当水头比较大时则相反。

关键词: 应力重分布; 圆形隧洞; 渗流场; Hoke-Brown 准则; 弹塑性力学

中图分类号: O357.3

文献标识码: A

文章编号: 1673-0836(2019)05-1410-07

Elastio-plastic Analysis on Deep Buried Circle Tunnel Considering Seepage Effect Based on Hoke-Brown Criterion

Ouyang Yufeng¹, Liu Chengxu²

(1. Shenzhen Municipal Design & Research Institute Co., Ltd., Shenzhen, Guangdong 518029, P.R. China;

2. Shenzhen Metro Group Co., Ltd., Shenzhen, Guangdong 518026, P.R. China)

Abstract: For the deeply buried circle tunnel under the condition of axial symmetry, the equilibrium differential equation considering the body force of seepage is resolved by using the Hoke-Brown criterion, the implicit equation about the stress of tunnel in the plastic zone is obtained, and the numerical solution of the stress in the plastic zone is obtained by solving the transcendental equation. Considering the influence of stress redistribution, the numerical solution of stress in the elastic zone is obtained by using the stress continuous condition at the radius of the plastic zone. An example is analyzed by two methods based on the Hoke-Brown criterion and the Mohr-Coulomb criterion. The research shows that stress distribution characteristic is similar to the two criteria. The plastic zone is smaller, the radial stress is larger, the circumferential stress in the plastic zone is larger under the Hoke-Brown criterion. The plastic zone is larger, the radial stress is smaller, the circumferential stress in the plastic zone is smaller under the Mohr-Coulomb criterion. When the inner water head of the tunnel is smaller, the maximum stress based on the Hoke-Brown failure criterion is larger than the one based on the Mohr-Coulomb failure criterion, and the opposite result appears when the inner water head is large.

Keywords: stress redistribution; circle tunnel; seepage field; Hoke-Brown failure criterion; elastio-plastic mechanics

* 收稿日期: 2019-06-12(修改稿)

作者简介: 欧阳宇峰(1966—), 男, 湖南湘潭人, 硕士, 高级工程师, 主要从事岩土工程与结构工程等的设计与科研工作。E-mail: oyyufeng@sina.com

0 引言

大量工程实践和理论研究表明,地下水渗流作用将引起地下隧洞应力场及位移场发生变化。以往的地下隧洞应力计算方法^[1-10]大多未考虑渗流影响。文献[11]考虑了渗流的影响,以各因素轴对称假定为前提,推导出深埋地下隧洞位移及应力的弹性及弹塑性解,但其欠缺在于未考虑岩体的弹塑性变形所引起岩体应力重分布的影响。文献[12]考虑应力重分布作用及渗流影响,求得了深埋圆形透水隧洞弹塑性解析解。文献[11、12]均以隧洞岩土材料服从 Mohr- Coulomb 准则假定为前提条件,文献[13]参照文献[12]提出的计算方法,考虑岩土体材料非线性,基于 Hoke-Brown 准则推导了弹塑性应力解答,但相关解答形式相对复杂,且含有积分项,使用不便。

为改进上述计算方法,本文基于 Hoke-Brown 非线性准则,推导了深埋圆形透水隧洞弹塑性应力计算方法,即通过联立 Hoke-Brown 准则和平衡微分方程,最终将塑性区应力表达为矢径的隐式函数,且不含积分项,可通过求该解超越方程得到塑性区应力;再利用弹塑性区分界面应力连续条件,求得弹性区应力。在此基础上,将本文基于 Hoke-Brown 非线性准则的弹塑性应力计算结果与文献[11]基于 Mohr- Coulomb 线性准则的应力计算结果进行了对比,分析了两种情形下应力重分布剧烈程度、塑性区大小、峰值应力大小等差异。

1 弹性应力解答

无限大均质弹性体内一圆形隧洞如图 1 所示,内径为 r_a ,内水水头为 h_a ,内压为 p_a ;无限远处的水头为 h_0 ,外压为 p_0 ,其轴对称渗流场方程^[11]为

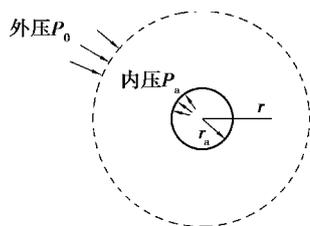


图 1 计算模型

Fig. 1 Calculation model

$$H(r) = \frac{1}{\ln \alpha} \left(h_a \ln \frac{\alpha r_a}{r} + h_0 \ln \frac{r}{r_a} \right) \quad (1)$$

式中: $H(r)$ 为水头; α 为一很大的数。

由此可得到渗透体积力为

$$f_r = -\gamma_w \frac{d(\xi H)}{dr} = \frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{r \ln \alpha} \quad (2)$$

式中: ξ 为岩石有效孔隙水压力系数; γ_w 为水的重度。假定隧洞周围岩体为均质体,忽略自重,建立微元体的平衡微分方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{r \ln \alpha} = 0 \quad (3)$$

式中: σ_r 和 σ_θ 分别为径向应力和环向应力,规定拉应力为正,压应力为负。文中所有应力均为有效应力,后面不再重复说明。应力边界条件为

$$\sigma_r = -p_a \quad (\text{当 } r = r_a \text{ 时}) \quad (4)$$

$$\sigma_r = -p_0 \quad (\text{当 } r = \beta r_a \text{ 时}) \quad (5)$$

式中: β 为一很大的数。根据上述平衡微分方程和边界条件,文献[11]求得应力弹性解答为

$$\sigma_r = K_1 + K_2 \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 - K_3 \ln r \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = K_4 - K_2 \left(\frac{r_a}{r} \right)^2 - K_3 \ln r \quad (7)$$

式中: K_1, K_2, K_3, K_4 计算表达式如下:

$$K_1 = \frac{E(-A_1 + A_2 \beta^2)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(\beta^2 - 1)} - \frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{2 \ln \alpha} \quad (8)$$

$$K_2 = \frac{E(A_1 - A_2) \beta^2}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(\beta^2 - 1)} \quad (9)$$

$$K_3 = \frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{2(1 - \mu) \ln \alpha} \quad (10)$$

$$K_4 = \frac{E(-A_1 + A_2 \beta^2)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)(\beta^2 - 1)} - \frac{\mu \gamma_w \xi (h_a - h_0)}{2(1 - \mu) \ln \alpha} \quad (11)$$

$$A_1 = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E} \left[\frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{2 \ln \alpha} \left(\frac{\ln r_a}{1 - \mu} + 1 \right) - p_a \right] \quad (12)$$

$$A_2 = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E} \left[\frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{2 \ln \alpha} \left(\frac{\ln(\beta r_a)}{1 - \mu} + 1 \right) - p_0 \right] \quad (13)$$

式中: E 为岩体弹性模量; μ 为泊松比。

2 弹塑性应力解答

考虑到洞周岩体塑性变形性能发挥引起应力重分布,引入应力调整系数 λ ,重分布后弹性区($r \geq R_p, R_p$ 为塑性区半径)岩体应力为

$$\sigma_r = K_1 + \lambda K_2 \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - K_3 \ln r \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = K_4 - \lambda K_2 \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - K_3 \ln r \quad (15)$$

对于塑性区 ($r \leq R_p$) 岩体, 其大小主应力分别为 $\sigma_1 = -\sigma_\theta, \sigma_3 = -\sigma_r$, 假定岩体服从 Hoke-Brown 准则, 即

$$\sigma_1 = \sigma_3 + (m\sigma_c\sigma_3 + s\sigma_c^2)^\eta \quad (16)$$

其中 m, σ_c, s, η 均大于零。将大小主应力代入上式得

$$\sigma_\theta = \sigma_r - (-m\sigma_c\sigma_r + s\sigma_c^2)^\eta \quad (17)$$

由于塑性区岩体仍满足平衡微分方程, 故将上式代入式(3), 可得:

$$\frac{d\sigma_r}{(-m\sigma_c\sigma_r + s\sigma_c^2)^\eta + \frac{\gamma_w \xi (h_a - h_0)}{\ln \alpha}} + \frac{dr}{r} = 0 \quad (18)$$

当 $\eta=0.5$ 时, 上述式(18)可积分求解。令

$$K_5 = -m\sigma_c \quad (19)$$

$$K_6 = s\sigma_c^2 \quad (20)$$

$$K_7 = \gamma_w \xi (h_a - h_0) / \ln \alpha \quad (21)$$

由此, 式(18)可改写为

$$\frac{d\sigma_r}{\sqrt{K_5\sigma_r + K_6} + K_7} + \frac{dr}{r} = 0 \quad (22)$$

上式积分可得

$$\frac{2}{K_5} [\sqrt{K_5\sigma_r + K_6} - K_7 \ln(\sqrt{K_5\sigma_r + K_6} + K_7)] + \ln r = K_8 \quad (23)$$

其中 K_8 为待定系数, 将洞壁处应力边界条件式(4)代入上式得到:

$$K_8 = \frac{2}{K_5} [\sqrt{-K_5 p_a + K_6} - K_7 \ln(\sqrt{-K_5 p_a + K_6} + K_7)] + \ln r_a \quad (24)$$

由此, 式(23)描述了塑性区径向应力 σ_r 与半径 r 的隐式函数关系, 即微分方程(18)的解。再通过求解超越方程式(23)可求得塑性区应力 σ_r , 再代入式(17)可计算塑性区应力 σ_θ 。由此可知, 与文献[12] 基于 Mohr-Coulomb 准则求得塑性区应力解析解相比, 基于 Hoke-Brown 准则只能求得塑性区应力的数值解。

将塑性区半径处应力记为 $\sigma_r^R, \sigma_\theta^R$, 由应力连续条件可知, 其既满足弹性区应力表达式(14)和式(15), 又满足塑性区应力表达式(23)和式(17), 即

$$\sigma_r^R = K_1 + \lambda K_2 \left(\frac{r_a}{R_p}\right)^2 - K_3 \ln R_p \quad (25)$$

$$\sigma_\theta^R = K_4 - \lambda K_2 \left(\frac{r_a}{R_p}\right)^2 - K_3 \ln R_p \quad (26)$$

$$\frac{2}{K_5} [\sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} - K_7 \ln(\sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} + K_7)] + \ln R_p = K_8 \quad (27)$$

$$\sigma_\theta^R = \sigma_r^R - \sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} \quad (28)$$

以上 4 式联立, 可求得 4 个未知数 λ, R_p, σ_r^R 和 σ_θ^R 。

将式(25)与式(26)相加可得

$$\sigma_r^R + \sigma_\theta^R = K_1 + K_4 - 2K_3 \ln R_p \quad (29)$$

将式(27)与式(28)代入上式可得

$$2\sigma_r^R - \sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} = K_1 + K_4 - 2K_3 \times \left\{ K_8 - \frac{2}{K_5} [\sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} - K_7 \ln(\sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} + K_7)] \right\} \quad (30)$$

这是关于 σ_r^R 的超越方程, 需试算或迭代求解。解得后代入式(28)可得 σ_θ^R , 再将 σ_r^R 和 σ_θ^R 代入式(29)可得

$$R_p = \exp[(K_1 + K_4 - \sigma_r^R - \sigma_\theta^R) / 2K_3] \quad (31)$$

再由式(25)或式(26)可求得 λ , 再代入式(14)、式(15)可计算弹性区应力。

特别地, 当内外水头相即 $h_a = h_0$ 时(此时无渗流作用), $K_3 = K_7 = 0$, 此时, 式(30)退化为

$$2\sigma_r^R - \sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} = K_1 + K_4 \quad (32)$$

这是关于 σ_r^R 的一元二次方程, 可直接求解。解得后代入式(28)可得 σ_θ^R , 同时式(27)退化为

$$\frac{2}{K_5} \sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6} + \ln R_p = K_8 \quad (33)$$

由此可得

$$R_p = \exp\left(K_8 - \frac{2}{K_5} \sqrt{K_5\sigma_r^R + K_6}\right) \quad (34)$$

再由式(25)或式(26)可求得 λ 。再代入式(14)、式(15)可计算弹性区应力。

3 实例计算

现用实例说明本文弹塑性应力计算方法的应用。为便于比较, 现不仅对 Hoke-Brown 准则条件下隧洞弹塑性应力进行计算, 还用文献[12] 方法对 Mohr-Coulomb 准则的情形进行对比计算。计算参数取值如下: 隧洞内径 $r_a = 2$ m, 无穷远处水头

为 $h_0 = 50 \text{ m}$, 应力 $p_0 = 10 \text{ MPa}$, 隧洞内水压力 $p_a = 0 \text{ MPa}$, 岩体弹性模量 $E = 2\,000 \text{ MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.25$, 岩石有效孔隙水压力系数 $\xi = 1.0$, $\alpha = \beta = 1.0 \times 10^{10}$ 。岩石三轴压缩试验结果见表 1。

表 1 不同围压下岩石三轴压缩强度 MPa
Table 1 Rock's triaxial compression strength with various confining pressure MPa

σ_3	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
σ_1	0.49	7.43	11.45	13.43	14.42	15.23	15.73

对上表试验结果,分别按 Mohr-Coulomb 准则、Hoke-Brown 准则进行拟合得到

$$\sigma_1 = 4.592\sigma_3 + 4.280 \quad (35)$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{54.18\sigma_3 + 29.89} \quad (36)$$

由此可得 $c = 1.00 \text{ MPa}$, $\varphi = 40.0^\circ$; $m\sigma_c = 54.18 \text{ MPa}$, $s\sigma_c^2 = 29.89 \text{ MPa}^2$ 。上述拟合结果与试验结果如图 2 所示。

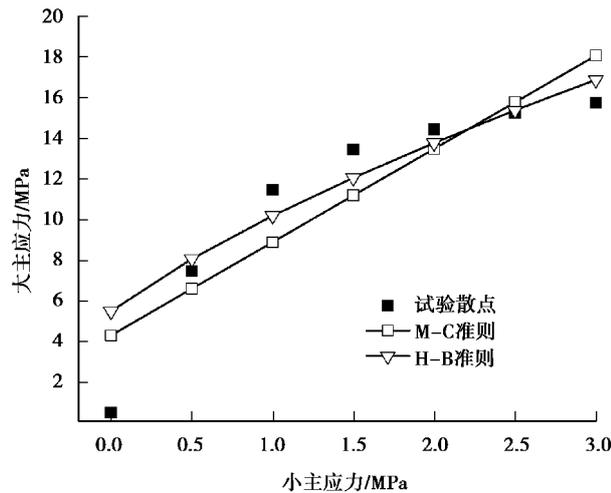


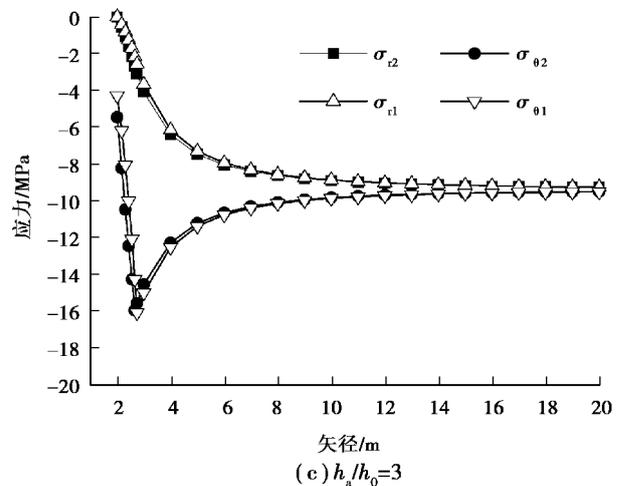
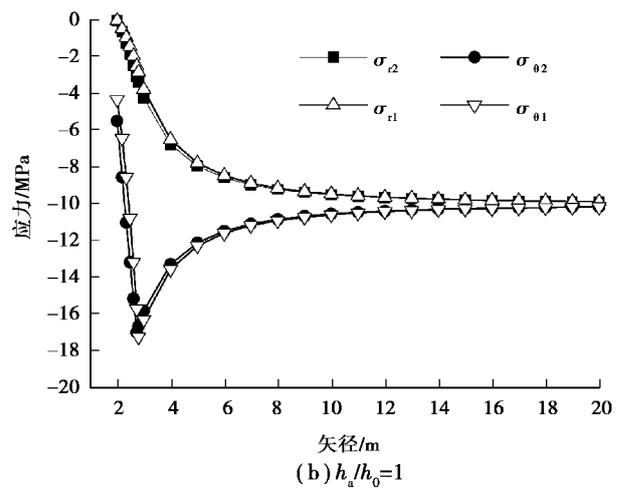
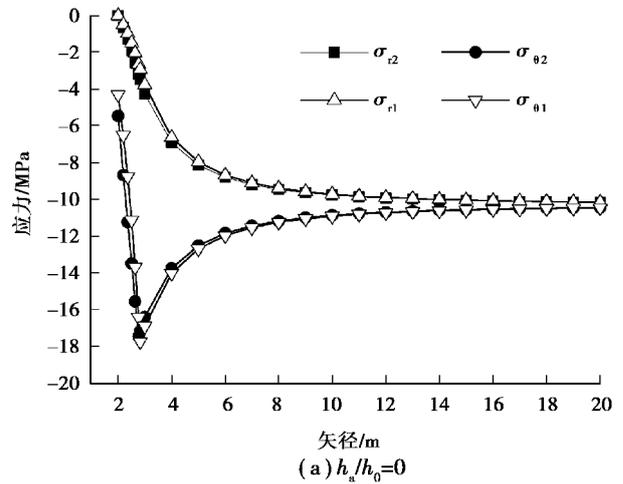
图 2 试验结果和两种准则拟合结果

Fig. 2 Test results and modeling results of the two methods

为了分析水头对应力分布的影响,依次取洞内水头与无穷远处水头比值 $h_a/h_0 = 0, 1.0, 3.0, 5.0, 7.0, 9.0$, 按两种方法计算所得洞周应力如图 3 所示。图中 σ_{r1} 与 $\sigma_{\theta1}$, σ_{r2} 与 $\sigma_{\theta2}$ 分别表示基于 Mohr-Coulomb 准则、Hoke-Brown 准则的应力。

由图 3 可知:两种准则下隧洞岩体应力分布规律相似。随着矢径的增大,径向应力(绝对值,下同)逐渐增大并趋于稳定,环向应力先增大,达到峰值后逐渐减小并随趋于稳定,环向应力与径向应力越来越接近。就按两种准则应力计算差异而言,按 Hoke-Brown 准则求得的径向应力比按 Mohr-

Coulomb 准则求得值大;在塑性区按 Hoke-Brown 准则求得的环向应力比按 Mohr-Coulomb 准则求得值大,两者相对误差较大,在弹性区则相反,相对误差也较小。对塑性区按两种准则计算的岩体应力及相对误差见表 2。由表 2 可知,相对误差约 20%~33%。



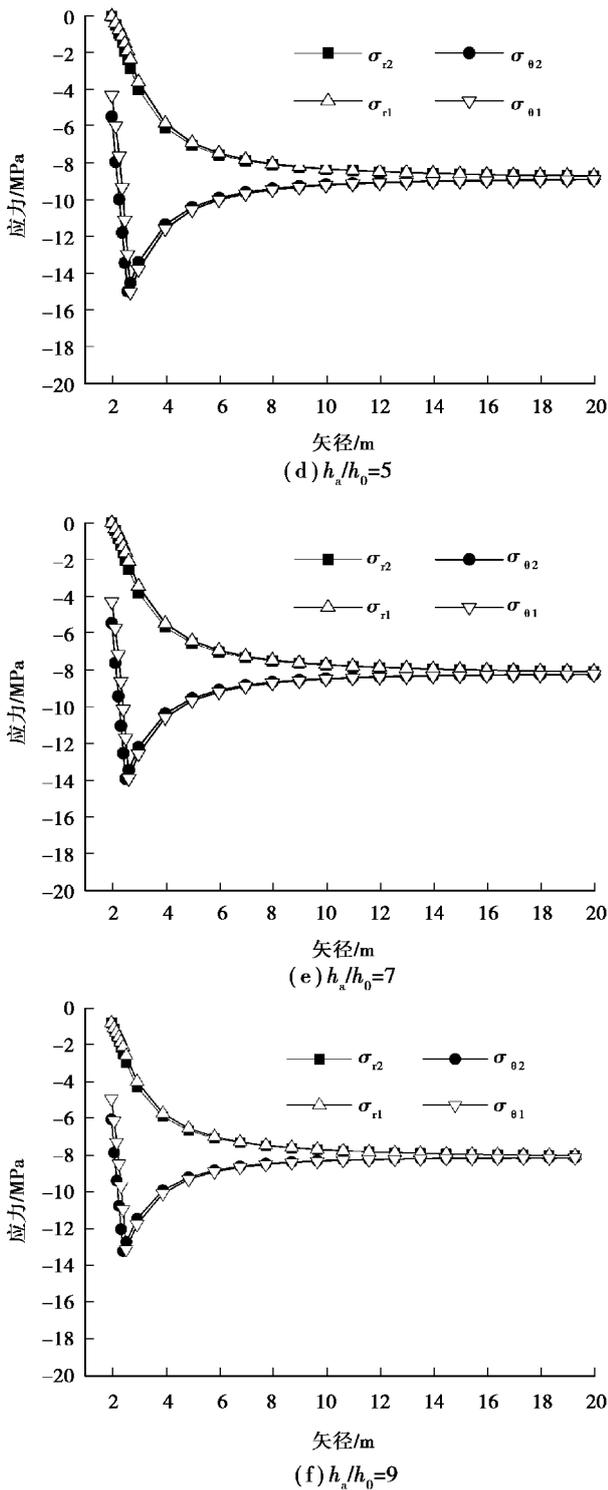


图 3 两种准则下的应力分布

Fig. 3 Stress distribution by two methods

塑性区半径 R_p 对应的环向应力 σ_θ 即为峰值应力 $\sigma_{\theta max}$, 是洞周应力分布的一个重要指标, 不同水头下按两种方法计算得到的峰值应力如图 4 所示。由图 4 可知, 峰值应力随着内外水头比的增大而减小。在水头比较小时, 按 Hoke-Brown 准则求

得的峰值应力比按 Mohr-Coulomb 准则求得值小 (相对误差也较小), 当水头比较大时, 情况则相反。

表 2 按两种准则计算的塑性区应力

Table 2 Stress distribution in the plastic zone by two methods

$h_a/h_0=0$	R_p	r/m				
	/m	2.200	2.362	2.507	2.642	2.769
$\sigma_{\theta 1}/\text{MPa}$	2.825	-6.52	-8.76	-11.14	-13.68	-16.42
$\sigma_{\theta 2}/\text{MPa}$	2.769	-8.68	-11.25	-13.50	-15.55	-17.46
相对误差%	-1.98	33.2	28.3	21.2	13.6	6.3
σ_{r1}/MPa	2.825	-0.48	-0.97	-1.49	-2.04	-2.64
σ_{r2}/MPa	2.769	-0.64	-1.28	-1.92	-2.56	-3.20
相对误差%	-1.98	32.2	31.6	29.0	25.4	21.3
$h_a/h_0=5$	R_p	r/m				
	/m	2.150	2.276	2.390	2.495	2.594
$\sigma_{\theta 1}/\text{MPa}$	2.693	-5.96	-7.61	-9.31	-11.09	-12.96
$\sigma_{\theta 2}/\text{MPa}$	2.594	-7.93	-9.97	-11.77	-13.42	-14.96
相对误差%	-3.68	33.2	31.0	26.4	21.0	15.4
σ_{r1}/MPa	2.693	-0.36	-0.72	-1.09	-1.48	-1.89
σ_{r2}/MPa	2.594	-0.47	-0.95	-1.42	-1.90	-2.37
相对误差%	-3.68	31.0	31.5	30.4	28.4	25.8
$h_a/h_0=9$	R_p	r/m				
	/m	2.112	2.209	2.297	2.379	2.4576
$\sigma_{\theta 1}/\text{MPa}$	2.578	-5.53	-6.74	-7.98	-9.24	-10.54
$\sigma_{\theta 2}/\text{MPa}$	2.457	-7.34	-8.93	-10.36	-11.68	-12.91
相对误差%	-4.69	32.7	32.4	29.9	26.4	22.4
σ_{r1}/MPa	2.578	-0.27	-0.53	-0.80	-1.08	-1.36
σ_{r2}/MPa	2.457	-0.35	-0.70	-1.05	-1.40	-1.75
相对误差%	-4.69	29.8	30.9	30.8	29.9	28.5

按两种准则求得塑性区半径和应力调整系数与内外水头比的无量纲关系如图 5 所示。由图 5 可知, 无论按哪种准则计算, 塑性区半径均随着 h_a/h_0 增大而减小, 说明 h_a/h_0 的增大有利于缩小塑性区。应力调整系数也随 h_a/h_0 的增大而减小, 这说明 h_a/h_0 越小, 应力重分布引起的应力变化越剧烈。对同一内外水头比值, 按 Hoke-Brown 准则

计算得到的塑性区半径小于按 Mohr-Coulomb 准则计算的塑性区半径;按 Hoke-Brown 准则计算得到的应力调整系数小于按 Mohr-Coulomb 准则计算所得值,即按前者所得弹性区岩体应力因重分布程度相对缓和,而后者相对剧烈。

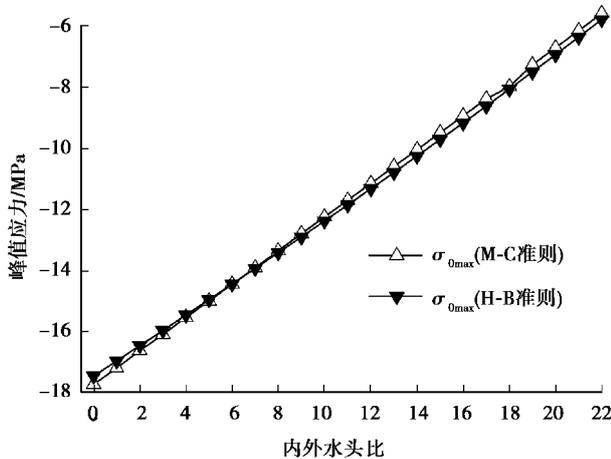


图4 峰值应力 $\sigma_{\theta\max}$ 与 h_a/h_0 的关系曲线

Fig. 4 $\sigma_{\theta\max} - h_a/h_0$ curves

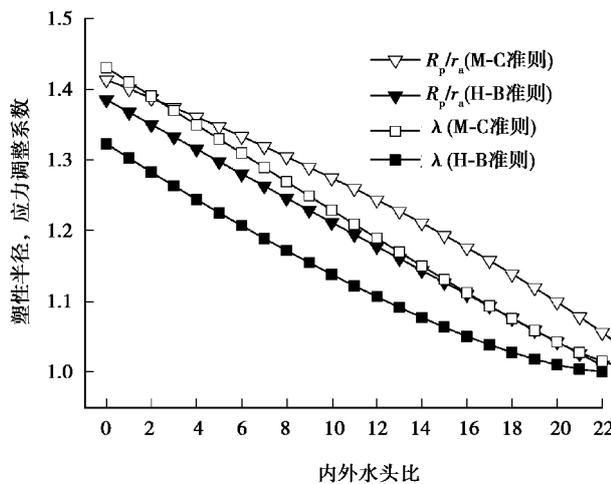


图5 塑性区半径和应力调整系数与 h_a/h_0 的关系曲线

Fig. 5 $R_p - h_a/h_0$ curves and $\lambda - h_a/h_0$ curves

4 结论

以各因素轴对称假定为前提,考虑岩体应力重分布的影响,基于 Hoke-Brown 准则对渗流作用下深埋圆形隧洞推导了弹塑性应力解答,并将该解答与基于 Mohr-Coulomb 准则的解答进行比较,得到以下结论:

(1)两种准则条件下,隧洞岩体应力的分布规律大致相同。在内外水头比等其他条件相同时,采用 Hoke-Brown 准则计算时,应力重分布程度较

缓和,塑性区较小,径向应力绝对值较大,塑性区环向应力也较大;当采用 Mohr-Coulomb 准则计算时,应力重分布程度较剧烈,塑性区较大,径向应力绝对值较小,塑性区环向应力也较小。

(2)隧洞峰值应力绝对值随着内外水头比的增大而减小。在水头比较小时,按 Mohr-Coulomb 准则求得的峰值应力绝对值比按 Hoke-Brown 准则求得值大,当水头比较大时,情况则相反。

参考文献 (References)

- [1] 孙钧, 侯学渊. 地下结构[M]. 北京: 科学出版社, 1991. (Sun Jun, Hou Xueyuan. Underground Structure [M]. Beijing: Science Press, 1991. (in Chinese))
- [2] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000. (Xu Zhilun. Elastic mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2000. (in Chinese))
- [3] 蔡美峰, 何满潮, 刘东燕. 岩石力学与工程[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (Cai Meifeng, He Manchao, Liu Dongyan. Rock mechanics and engineering [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))
- [4] 宋俐, 张永强, 俞宏宏. 压力隧洞弹塑性分析的统一解[J]. 工程力学, 1998, 15(4): 57-61. (Song Li, Zhang Yongqiang, Yu Maohong. Elastoplastic unified analysis of pressure tunnel[J]. Engineering Mechanics, 1998, 15(4): 57-61. (in Chinese))
- [5] Jiang Y, Yaneda H, Tanabashi Y, et al. Theoretical estimation of loosening pressure on tunnels in soft rocks [J]. Tunneling and Underground Space Technology, 2001, 16(2): 99-105.
- [6] 任青文, 张宏朝. 关于芬纳公式的修正[J]. 河海大学学报, 2001, 29(6): 109-111. (Ren Qinwen, Zhang Hongchao. A modification of Fenner Formula[J]. Journal of Hohai University, 2001, 29(6): 109-111. (in Chinese))
- [7] 王亮, 赵均海, 李小伟. 岩质圆形隧洞围岩应力场弹塑性新解[J]. 工程地质学报, 2007, 15(3): 422-427. (Wang Liang, Zhao Junhai, Li Xiaowei. New elastoplastic solution of rock circle tunnel surrounding rockmass stress field [J]. Journal of Engineering Geology, 2007, 15(3): 422-427. (in Chinese))
- [8] Sharan S K. Analytical solutions for stresses and displacements around a circular opening in a generalized Hoek-Brown rock [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2008, 45: 78-85
- [9] 蔡海兵, 程桦, 荣传新. 基于广义 Hoek-Brown 准则

- 的深埋硐室围岩塑性区位移分析[J]. 采矿与安全工程学报, 2015, 32(5): 778-785. (Cai Haibing, Cheng Hua, Rong Chuanxin. Analysis on rock plastic zone displacement of deep buried underground chamber based on generalized Hoke-Brown criterion [J]. Journal of Mining & Safety Engineering, 2015, 32(5): 778-785. (in Chinese))
- [10] 崔芳, 王利, 王云飞. 非轴对称荷载下圆形隧道弹性围岩应力解析解[J]. 地下空间与工程学报, 2017, 13(3): 637-642. (Cui Fang, Wang Li, Wang Yunfei. Stress analytic solution for elastic surrounding rock mass of circular tunnels subjected to non axisymmetric loads [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2017, 13(3): 637-642. (in Chinese))
- [11] 李宗利, 任青文, 王亚红. 考虑渗流场影响深埋圆形隧洞的弹塑性解[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(8): 1291-1295. (Li Zongli, Ren Qingwen, Wang Yahong. Elasto-plastic analytical solution of deep-buried circle tunnel considering fluid flow field [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(8): 1291-1295. (in Chinese))
- [12] 刘成学, 杨林德, 李鹏. 考虑应力重分布的深埋圆形透水隧洞弹塑性解[J]. 工程力学, 2009, 26(2): 16-20. (Elastic-plastic analytical solution of deep buried circle tunnel considering stress redistribution [J]. Engineering Mechanics, 2009, 26(2): 16-20. (in Chinese))
- [13] 彭立, 邹金峰, 彭建国, 等. 基于 Hoek-Brown 准则下的富水透水隧洞非线性解析[J]. 土木工程学报, 2011, 44(7): 149-156. (Peng Li, Zou Jinfeng, Peng Jianguo, et al. Nonlinear analytical solution for underwater tunnel using Hoke-Brown failure criterion [J]. China Civil Engineering Journal, 2011, 44(7): 149-156. (in Chinese))

(上接第 1409 页)

- [16] 孙海忠, 张卫. 一种分析软土黏弹性的分数阶 Kelvin 模型[J]. 岩土力学, 2007, 28(9): 1983-1986. (Sun Haizhong, Zhang Wei. Analysis of soft soil with viscoelastic fractional derivative Kelvin model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(9): 1983-1986. (in Chinese))
- [17] 殷德顺, 任俊娟, 和成亮, 等. 一种新的岩土流变模型元件[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 29(9): 1899-1903. (Yin Deshun, Ren Junjuan, He Chengliang, et al. New rheological model element for geomaterials [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 29(9): 1899-1903. (in Chinese))
- [18] 郭佳奇, 乔春生, 徐冲, 等. 基于分数阶微积分的 Kelvin-Voigt 流变模型[J]. 中国铁道学报, 2009, 20(4): 1-6. (Guo Jiaqi, Qiao Chunsheng, Xu Chong, et al. The Kelvin-Voigt rheological model based on fractional calculus [J]. China Railway Science, 2009, 20(4): 1-6. (in Chinese))
- [19] 解益, 李培超, 汪磊, 等. 分数阶导数粘弹性饱和土体一维固结半解析解[J]. 岩土力学, 2017, 38(11): 1-7. (Xie Yi, Li Peichao, Wang Lei. Semi-analytical solution for one-dimensional consolidation of viscoelastic saturated soil with fractional order derivative [J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(11): 1-7. (in Chinese))
- [20] 刘忠玉, 杨强. 基于分数阶 Kelvin 模型的饱和黏土一维流变固结分析[J]. 岩土力学, 2017, 38(12): 1001-1009. (Liu Zhongyu, Yang Qiang. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay based on fractional order Kelvin's model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(12): 1001-1009. (in Chinese))
- [21] 汪磊, 孙得安, 解益, 等. 任意荷载下分数阶导数粘弹性饱和土体一维固结[J]. 岩土工程学报, 2017, 32(10): 1823-1831. (Wang Lei, Sun Dean, Xie Yi, et al. One-dimensional consolidation of fractional derivative viscoelastic saturated soils under arbitrary loading [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 32(10): 1823-1831. (in Chinese))
- [22] Nonnenm Acher T F, Metzler R. On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent application [J]. Fractals, 1995, 3(3): 557-566.