

# 损伤岩石受拉变形模量的理论计算方法<sup>\*</sup>

沈才华<sup>1,2</sup>, 王浩越<sup>1</sup>, 李雪松<sup>1</sup>, 王媛<sup>1</sup>

(1. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098; 2. 河海大学 江苏省岩土工程技术工程研究中心, 南京 210098)

**摘 要:** 岩石受拉破坏过程本质是微裂纹扩展过程, 假设均匀损伤的岩样由很多单裂纹岩石单元组成, 受拉条件下含裂纹岩石单元的应变包括裂纹张开引起的岩石弹性应变, 非弹性应变, 岩石基质的弹性应变。采用 COD 理论计算裂纹尖端的最大张开位移, 根据裂纹张开位移计算单裂纹单元的应变增量, 计算出岩样受拉破坏时的应变与初始裂纹密度和裂纹最小间距的关系, 最后建立了受拉条件下损伤岩样的体积变形模量计算方法。本方法能同时有效描述初始裂纹数量和裂纹长度对岩石变形的影响, 更符合实际情况。结合算例分析显示: 岩石裂纹张开引起的应变 (包括弹性部分和塑性部分) 是损伤岩石变形的重要组成部分, 与初始损伤系数和内在抗拉强度成正比, 与岩石基质弹性模量成反比。岩石的变形模量随着岩石的初始损伤增加而减小, 随着裂纹长度损伤因子的增大而减小。并且初始损伤系数与初始裂纹密度以及裂纹最大半长的平方均成正比。

**关键词:** 岩石抗拉强度; 变形模量; 弹塑性断裂力学; COD 设计理论;

中图分类号: TU458

文献标识码: A

文章编号: 1673-0836(2018)06-1466-10

## Theoretical Calculation Method of Tensile Deformation Modulus of Damaged Rock

Shen Caihua<sup>1,2</sup>, Wang Haoyue<sup>1</sup>, Li Xuesong<sup>1</sup>, Wang Yuan<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, P.R. China; 2. Jiangsu Research Center for Geotechnical Engineering Technology, Hohai University, Nanjing 210098, P.R. China)

**Abstract:** The essence of tensile rock failure is the propagation of micro cracks. Assuming that the uniform damage of rock sample consists of many single cracked rock units, the strain of crack in rock unit under the condition of tensile including elastic strain and inelastic strain caused by crack opening, elastic strain caused by rock matrix. Calculating crack opening displacement with COD theory, and by which we can calculate the strain increment of rock element. The relationship between rock tensile failure strain and the initial crack density and crack spacing was calculated, and the calculation method of damage rock specimen's bulk modulus of deformation under the condition of tensile was finally established. The method can effectively describe the influence of the initial crack number and the crack length on the rock deformation, which is more accordant with the actual conditions. Combined with example analysis shows that: the strain caused by the crack opening (including elastic and plastic parts) is an important part of the deformation of damage rock, and the initial damage coefficient and internal tensile strength is directly proportional to the strain, and elastic modulus of rock matrix is inversely proportional to the strain. The deformation modulus of rock decreases with the increase of initial damage of rock, and decreases with the increase of crack length damage factor. And the initial damage coefficient is proportional to the initial crack density and the square of the maximum half length of the crack.

**Keywords:** rock tensile strength; deformation modulus; elastic-plastic fracture mechanics; COD theory

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2018-06-18 (修改稿)

作者简介: 沈才华 (1976-), 男, 江苏宜兴人, 博士, 副研究员, 主要从事地下工程、岩土工程领域的教学科研工作。

E-mail: Shencaihua@hhu.edu.cn

基金项目: 江苏省自然科学基金面上项目 (BK20141419); 国家博士后基金 (2015M571656); 浙江省交通运输厅科技计划重点项目 (2015J09); 中央高校基本科研业务费专项资金 (2015B25914)

## 0 引言

岩石的破坏主要是微裂纹不断扩展、合并形成宏观裂缝的结果,裂纹的扩展导致强度降低,裂纹的失稳扩展则是导致岩石断裂破坏的主要原因。李杰等<sup>[1]</sup>研究了岩石裂纹张开、闭合的力学过程,认为岩石主要以张拉裂纹破坏为主。压缩试验声发射等相关数据表明<sup>[2-3]</sup>:岩石的破坏也是局部裂纹张拉扩展引起的,同时造成了岩石扩容现象。张绪涛等<sup>[4]</sup>通过岩石直接拉伸装置,对几种岩石进行拉伸试验,结果表明,岩石断裂主要是脆性断裂,裂纹的存在对岩石断裂行为有很大影响。Okubo 等<sup>[5]</sup>的研究表明有些岩石受拉时表现为脆性断裂,有些应力应变曲线则表现出塑性破坏特征,这可能是岩石种类、成分差异造成的。王瑶等<sup>[6]</sup>的研究表明:不同应变率对应的岩石抗拉强度差异明显,应变率越大,岩石抗拉强度越大。Kranz<sup>[7]</sup>认为,应变率效应可以解释为空气中的水降低了裂纹尖端的屈服应力强度。席婧仪等<sup>[8]</sup>研究裂纹之间相互影响,发现裂纹间距大于等于小裂纹长度,小裂纹对主裂纹几乎无影响。Castro 等<sup>[9]</sup>基于 Griffith 裂纹提出了新的脆性岩石破坏的理论解,把破坏面剪切应力表示为岩石固有抗拉强度、裂纹半长和裂纹尖端临界距离比值的函数,判断岩石是否破坏。

可见岩石裂纹扩展是变形破坏的主因,基于裂纹扩展理论的变形预测可以为岩石工程安全控制提供理论指导,具有重要实际意义。因此,岩体变形模量对于研究地下工程有十分重要的意义,但目前仍难以准确确定。原位测试也受很多环境条件影响,只能测出测点周围小范围岩体变形模量<sup>[10-12]</sup>。因此,目前多采用容易获得的岩体综合参数如采用岩体质量评价指标 RMR (rock mass rating)、岩体质量指标 RQD (rock quality designation)、Q 值、岩体波速  $v_p$  等来估算岩体变形模量。蒋小伟等<sup>[13]</sup>利用 RQD 有效估算了岩体变形模量;Chun 等<sup>[14]</sup>比较了利用 RMR 估算岩体变形模量和利用 RQD 结合单轴抗压强度计算变形模量的结果,发现后者更好;Barton<sup>[15]</sup>建立了利用 Q 值估算岩体变形模量表达式;李维树等<sup>[16]</sup>建立了岩体波速与变形模量的关系式。杨建平等<sup>[17]</sup>利用有限元法研究随机裂隙岩体的变形模量,提出各个方向的变形模量可以用柔度张量拟合。这些方法本质上是一种拟合法,不能反映岩石张拉破坏过程中裂纹扩展的本质机理。笔者基于裂纹扩展理论,把含裂纹单元的岩石应变分离为基质应变

与裂纹张开应变两部分,分别计算出岩石张拉裂纹扩展引起的应变和岩石基质应变,从而计算出岩石变形模量。该新方法物理意义明确,具有普适性,可以为理论研究和工程应用提供参考。

## 1 基本假定与研究思路

### 1.1 基本假定条件

假设岩石是含均匀裂纹分布的均匀体,并满足以下假设条件:

- (1) 裂纹共平面,平行均布;
- (2) 裂纹之间互不影响<sup>[8]</sup>;
- (3) 裂纹扩展形状为菱形;
- (4) 裂纹扩展临界状态时裂纹尖端塑性区采用 Mises 屈服准则;
- (5) 轴拉时所有裂纹同时张开。

本文不考虑三维空间效应的影响,只研究二维平面情况。

### 1.2 研究思路

在上述假定的基础上,首先利用断裂力学理论计算单个裂纹尖端失稳临界状态的裂纹张开位移,根据裂纹张开位移计算单裂纹应变增量,再结合初始裂纹密度以及最小间距假设计算多裂纹岩石失稳临界状态的应变增量,最后计算该初始裂纹损伤条件下岩石的体积变形模量,并结合试验数据分析进行验证。

### 1.3 含单裂纹岩石单元体等效应变计算方法

根据假设条件,含单裂纹岩石单元体的应变计算是关键,含单裂纹岩石单元裂纹扩展时临界应变值  $\varepsilon_{all}$  分解为两部分:基质弹性应变  $\varepsilon_e$ 、裂纹张开应变  $\Delta\varepsilon_{all}$ ,其中,裂纹张开应变包括裂纹尖端未发生塑性区时的弹性变形  $\Delta\varepsilon_1$  和裂纹尖端塑性应变后裂纹继续张开的应变  $\Delta\varepsilon_2$ ,如图 1 所示。

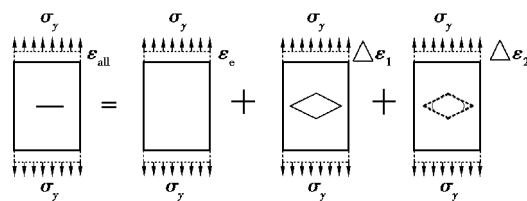


图 1 含裂纹单元体总应变的组成

Fig. 1 Component of total strain in unit body containing cracks

根据 COD 理论,裂纹扩展前尖端有局部塑性区,裂纹尖端张开位移为  $\delta$ ,因此,忽略局部塑性区体积应变和泊松比(岩石的泊松比很小,对整体变形影响不大)的影响,裂纹尖端未发生塑性区时的弹性应

变增量  $\Delta\varepsilon_1$  和裂纹尖端塑性应变后裂纹继续张开的应变增量  $\Delta\varepsilon_2$  可以根据断裂力学理论简化为如图 2 所示的计算简图。

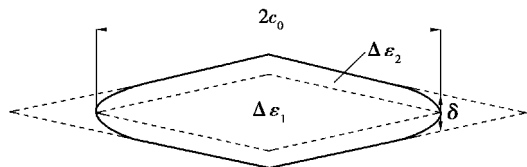


图 2 裂纹张开引起的应变增量计算简图

Fig. 2 Calculation diagram of simplified strain increment caused by crack propagating

## 2 理想含均匀裂纹岩石初始损伤的定义

岩石内部微裂纹的长度、数量不同对应的岩石损伤不同,如图 3 所示,同一块理想均匀岩石,损伤状态变化过程可描述为内部微裂纹分布状态变化的 2 种典型基本情况。情况 1:图 3(a)所示裂纹初始数量固定;损伤发展过程描述为拉伸荷载作用下,裂纹长度逐渐扩展,即  $2c_1$  逐渐增大;情况 2:图 3(b)所示裂纹初始长度固定;损伤发展过程描述为拉伸荷载作用下,微裂纹数量增加,即裂纹密度不断增加,裂纹长度  $2c_2$  是固定值。实际岩石损伤度由裂纹数量和长度两者共同确定,但均可以分解为上面 2 种基本情况的组合,考虑到受拉岩石的裂纹扩展通常情况下优先沿着已经存在的裂纹扩展<sup>[18-19]</sup>,因此,本文采用情况 1 描述岩石的损伤度发展过程进行理论研究,忽略拉伸过程新萌生的微裂纹。岩石的初始损伤状态主要由初始裂纹密度和初始裂纹长度确定,并且初始裂纹密度在损伤发展过程中为常量。把单位面积内含裂纹条数定义为岩石的初始裂纹密度。计算公式为:

$$\rho = \frac{i}{a_1 a_2} \quad (1)$$

式中: $i$  是  $a_1 \times a_2$  面积内裂纹数量,对于某一理想岩样; $\rho$  为定值。

在该初始裂纹密度和初始裂纹长度条件下(即该岩石的初始损伤)随着初始裂纹长度的增加,损伤度也增加。

含裂纹岩石,受拉时裂纹扩展,根据席婧仪等<sup>[8]</sup>的岩石试验结果,裂纹间距大于小裂纹长度时,小裂纹对主裂纹的起裂没有影响,可以视为单裂纹扩展,当裂纹间距与裂纹长度相等时裂纹相互影响导致裂纹瞬间贯穿破坏。

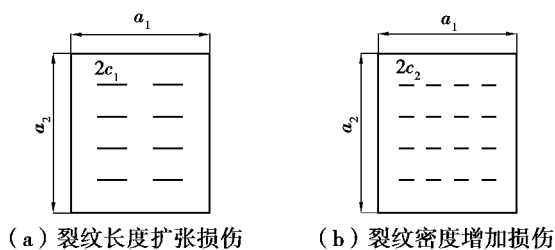


图 3 不同的初始损伤状态示意图

Fig. 3 Schematic diagram of different original damage status

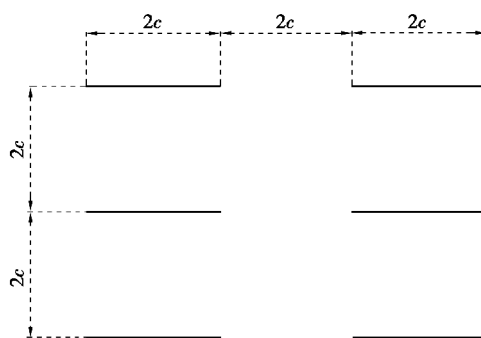


图 4 裂纹最小间距示意图

Fig. 4 Schematic diagram of minimum interval among cracks

因此,在初始损伤条件下随着裂纹扩展,定义裂纹长度损伤度因子:

$$f = \frac{2c}{2c_m} = \frac{c}{c_m} \quad (2)$$

式中: $2c$  是扩展过程裂纹长度; $2c_m$  是裂纹失稳扩展临界长度(如图 4 所示),若裂纹继续扩展则裂纹之间将相互影响,迅速贯穿至破坏,此时对应裂纹间距也为  $2c_m$ ,显然,损伤过程可以表示为裂纹增长过程,并有  $0 < 2c \leq 2c_m$ ,对应损伤度因子为  $0 < f \leq 1$ 。

## 3 理论计算模型

拉应力下,裂纹均匀分布的岩样如图 5 所示:

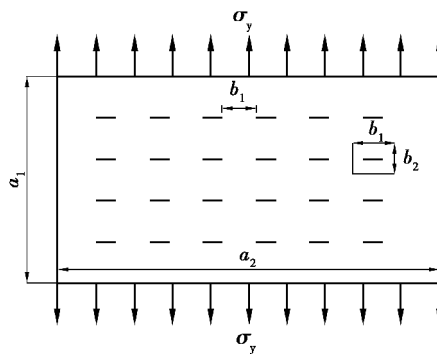


图 5 均布裂纹示意图

Fig. 5 Schematic diagram of uniform cracks

在裂纹间距大于临界间距时,裂纹相互影响可忽略,因此,可以采用单裂纹扩展进行分析。取图 5 中某条单裂纹进行研究,如图 6 所示。

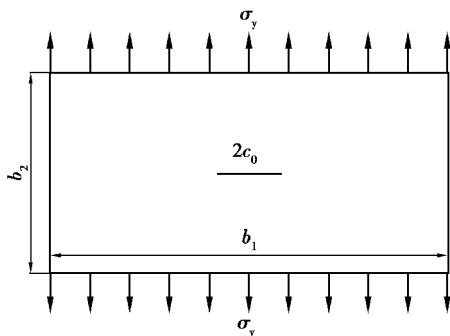


图 6 单裂纹示意图

Fig.6 Schematic diagram of single crack

## 4 基于 COD 理论岩石拉伸变形模量计算方法

### 4.1 COD 理论与等效 I 型裂纹扩展

裂纹端部张开位移 (Crack Tip Opening Displacement) 简称 CTOD, 现在常被称为裂纹张开位移 (COD)。Wells 提出, 对于一种材料, 有其固定的 COD 临界值, 超过该值, 裂纹失稳扩展。COD 理论示意图如图 7 所示。

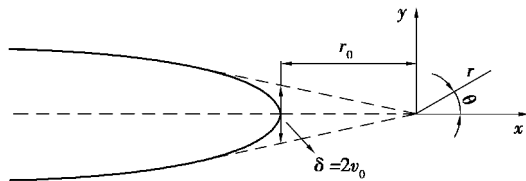


图 7 COD 理论示意图

Fig. 7 Schematic diagram of COD theory

根据 COD 理论, 考虑到岩石材料裂纹尖端破坏前具有一定的塑性特征, 所以从微观尺度出发合理地将尖端假定为有一定弧度的形状, 如图 7 中实线所示。裂纹尖端向前 (即  $x$  轴正方向)  $r_0$  的距离是裂纹扩展方向塑性区长度。 $\delta$  即为 COD 值,  $v_0$  是由弹性力学解出的裂纹尖端位移值。

将上述虚线塑性区域与实线已扩展裂纹区域合并在一起, 成为等效裂纹扩展区域, 等效裂纹长度为  $2c = 2c_0 + 2r_0$ 。图 7 中  $r$  是与等效裂纹尖端的距离,  $\theta$  是与  $x$  轴的夹角。

对于某一固定裂纹长度的损伤状态下, 随着岩石拉应力增大, 裂纹尖端张开位移增大, 假设 COD 值达到临界值时, 对应岩石拉应力为  $\sigma_{y\max}$ , 称之为

抗拉屈服强度, 当岩石拉应力  $\sigma_y$  达到  $\sigma_{y\max}$  之前, 裂纹没有扩展, 因此假设应变是弹性增加的, 即满足下列线性关系:

$$\Delta \varepsilon = \frac{\sigma_y}{\sigma_{y\max}} \Delta \varepsilon_{\max} \quad (3)$$

式中:  $\Delta \varepsilon$  是  $\sigma_y \leq \sigma_{y\max}$  时的应变, 当  $\sigma_y = 0$  时, 应变为 0; 当  $\sigma_y = \sigma_{y\max}$  时, 裂纹张开导致的应变达到临界值  $\Delta \varepsilon_{\max}$ 。

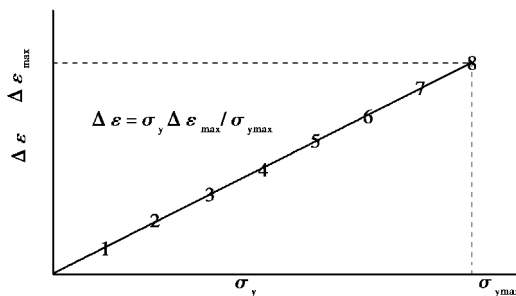


图 8 裂纹弹性张开时的应力-应变关系图

Fig. 8 Diagram of relationship between stress and strain when crack open in elasticity

### 4.2 裂纹尖端应力场的弹性分析

当裂纹尺寸远小于试样尺寸, 可以不考虑边界效应作用, I 型裂纹应力强度因子有:

$$K_I = \sigma_y \sqrt{\pi c} \quad (4)$$

裂纹尖端应力场如图 9 所示。

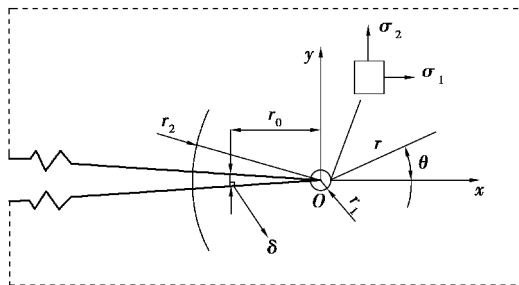


图 9 裂纹尖端应力场示意图

Fig.9 Schematic diagram of stress field around crack tip

I 型张拉裂纹尖端应力和位移的弹性平面应力解析表达式:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (7)$$

$$u = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (8)$$



$$\nu = \frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left[ (2K+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (9)$$

$$K = \frac{3-\lambda}{1+\lambda} \quad (10)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\lambda)} \quad (11)$$

式中:  $\sigma_1, \sigma_2$  分别是裂纹尖端附近某一点的主应力;  $r$  是距离尖端原点的距离;  $\theta$  是与  $x$  轴方向的夹角。  $u$  和  $v$  分别是裂纹尖端附近某一点  $x$  方向和  $y$  方向位移;  $\mu$  和  $K$  是材料常数,  $\lambda$  是材料泊松比。

取  $\theta = 90^\circ$ , 并将(4)式代入(6)式, 得到远场均布拉应力与裂纹尖端拉应力的关系:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_y \sqrt{c}}{\sqrt{2r}} \quad (12)$$

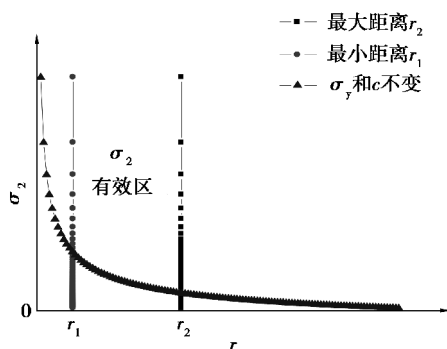


图 10 裂纹尖端弹性解的有效范围

Fig.10 Effective region of elasticity solution around crack tip

Lawn<sup>[18]</sup> 认为, 距离裂纹尖端太近或太远, 式(5)~(9)不适用。但在细观裂纹长度的尺度, 裂纹尖端主要区域适用, 即当  $r_1 < r < r_2$  时, 式(5)~(9)是合理的。本文采用该方法计算裂纹尖端应力场和位移场。

#### 4.3 裂纹尖端扩展方向塑性区长度

目前求解裂纹尖端扩展方向塑性区长度  $r_0$  的方法有 Dugdale (D-M) 模型方法、弹性解结合塑性屈服准则方法等。

本文采用弹性解结合塑性屈服准则的方法, 该方法力学原理明确, 容易理解, 为求出图 9 所示  $r_0$ , 先将裂纹尖端塑性区看做裂纹的一部分, 因此可以得到裂纹尖端的弹性应力场 (详见式(5)~(9))。

假设裂纹尖端附近未开裂区域塑性区的破坏满足弹塑性理论, 即弹性与塑性的交界面满足弹塑性屈服准则, 这里选择塑性屈服满足 Mises 屈服准则:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (13)$$

$\sigma_s$  就是裂纹失稳扩展所需达到的尖端临界应力值, 根据 Castro 等<sup>[9]</sup> 的表述, 这里称之为内在抗拉强度 (inherent tensile strength)。

图 9 所示试样在拉伸应力作用下, 平面应力条件下,  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ , 当裂纹尖端附近达到  $\sigma_2 = \sigma_s$ , 裂纹尖端塑性区达到最大, COD 也达到临界值, 继续增大  $\sigma_y$ , 裂纹失稳扩展, 塑性区随着裂纹扩展移动。

将式(5)~(7)代入式(13), 得到裂纹尖端塑性区表达式:

$$r = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + 3 \sin^2 \theta) \quad (14)$$

由式(14)得到的塑性区范围如图 11 所示。

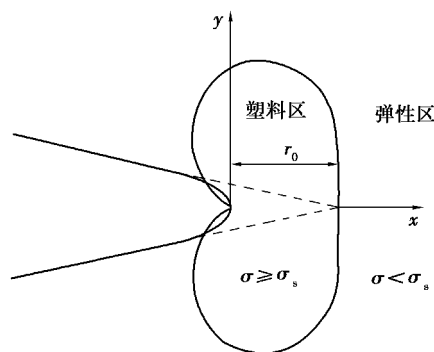


图 11 裂纹尖端弹塑性区域示意图

Fig. 11 Schematic diagram of elastic and plastic region around crack tip

当  $\theta=0$  时, 沿裂纹扩展方向塑性区长度为

$$r_0 = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \quad (15)$$

由式(4)得

$$K_I^2 = \sigma_y^2 \pi c \quad (16)$$

式中:  $c$  是裂纹半长, 远场拉应力  $\sigma_y$  达到抗拉屈服强度  $\sigma_{y\max}$ , 把式(15)代入式(16), 得到

$$r_0 = \frac{\sigma_{y\max}^2 c}{2\sigma_s^2} \quad (17)$$

裂纹张开产生的等效应变也达到最大  $\Delta\epsilon_{\max}$ 。

根据断裂力学 COD 理论, 当裂纹张开产生的应变低于应变临界值  $\Delta\epsilon_{\max}$  时, 由式(14)得到的塑性区半径随着远场应力  $\sigma$  增大而增大, 当应变超过  $\Delta\epsilon_{\max}$  时, 裂纹失稳扩展, 塑性区半径达到式(15)所示最大值后不再增大, 裂纹尖端塑性区随着裂纹扩展向前移动。

#### 4.4 裂纹张开位移 (COD) 值的求解

基于断裂力学理论, 为便于计算, 裂纹形状常简化为菱形, 如图 12 所示。

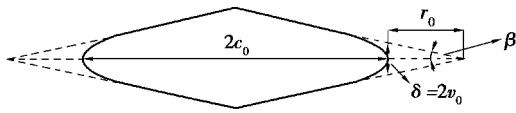


图 12 裂纹几何形状示意图

Fig. 12 Schematic diagram of crack geometry

图 12 中  $\beta$  是等效裂纹尖端张开角度的一半。

取  $\theta = \pi$ ,  $K = \frac{3-\lambda}{1+\lambda}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\lambda)}$  ( $\lambda$  是材料泊松比), 并将式 (16) 代入式 (9), 此时取  $v = v_0$  得到裂纹端部张开位移 (CTOD)  $\delta$  的临界值, 结合式 (17), 得到:

$$\nu_0 = \frac{2K_I^2}{\pi E \sigma_s} = \frac{2\sigma_{y\max}^2 c}{\sigma_s E} \quad (18)$$

$$\delta = 2\nu_0 = \frac{4K_I^2}{\pi E \sigma_s} = \frac{4\sigma_{y\max}^2 c}{\sigma_s E} \quad (19)$$

#### 4.5 岩石裂纹扩展单元的等效扩容应变

图 12 中实线部分即为岩石面积膨胀值, 近似地可用图 13 代替图 12 实线部分。

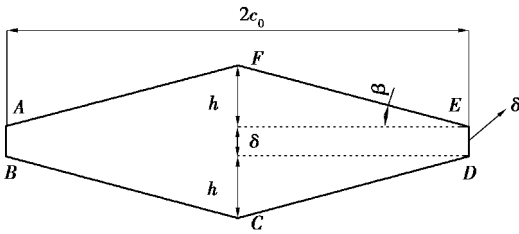


图 13 简化的裂纹形状

Fig. 13 Simplified crack geometry

由图 13 中的几何关系, 结合式 (18) 和式 (19), 得到:

$$\tan\beta = \frac{\nu_0}{r_0} = \frac{4\sigma_s}{E} \quad (20)$$

考虑到  $\beta$  很小, 式 (20) 可写成:

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{4\sigma_s}{E} \quad (21)$$

进一步可得:

$$h = c \cdot \tan\beta \approx \beta c = \frac{4\sigma_s c}{E} \quad (22)$$

因此 ABCDEF 的面积为:

$$\Delta A_{\max} = 2h_c + 2c\delta \quad (23)$$

将式 (19)、式 (22) 代入式 (23) 得到单裂纹张开临界状态引起的岩石变形为:

$$\Delta A_{\max} = \frac{8c^2(\sigma_s^2 + \sigma_{y\max}^2)}{E\sigma_s} \quad (24)$$

对于含单裂纹的单元  $b_1 \times b_2$ , 裂纹扩展前的临界体应变增量为:

$$\Delta \varepsilon_{\max} = \frac{\Delta A_{\max}}{b_1 b_2} = \frac{8c^2(\sigma_s^2 + \sigma_{y\max}^2)}{E\sigma_s b_1 b_2} \quad (25)$$

式中:  $\Delta \varepsilon_{\max}$  为裂纹失稳扩展的临界体应变增量;  $\Delta A_{\max}$  是裂纹张开引起的岩石变形;  $b_1$ 、 $b_2$  是含单裂纹岩样单元;  $c$  是裂纹长度;  $\sigma_s$  是内在抗拉强度;  $\sigma_{y\max}$  是抗拉屈服应力。在某一裂纹长度下, 远场应力大于  $\sigma_{y\max}$  时裂纹开始扩展, 裂纹越长, 岩石损伤越严重, 裂纹单元的抗拉屈服强度越小, 详见图 14。

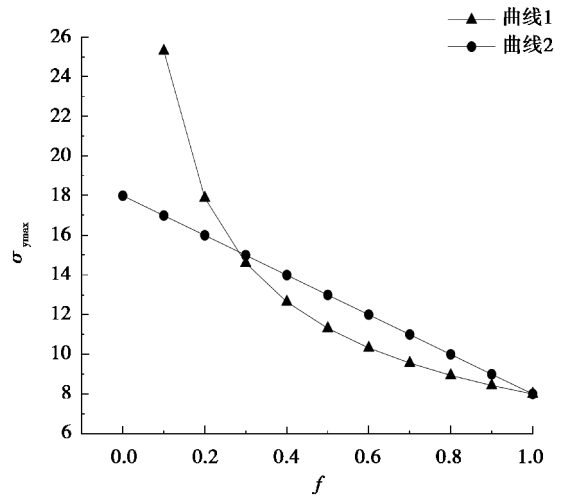


图 14 岩石抗拉屈服强度与裂纹长度损伤度因子的关系图

Fig. 14 Diagram of relationship between rock tension yield strength and crack length damage factor

式 (25) 计算的应变仅仅由裂纹引起, 不包括岩石基质弹塑性应变增量。文中提到的应变增量  $\Delta \varepsilon_{\max}$  均为裂纹扩展失稳临界状态裂纹扩张引起的应变增量。

当裂纹长度损伤度因子  $f$  趋近于 0 时, 岩石屈服破坏临界状态的远场拉应力  $\sigma_{y\max}$  趋近于 Mises 塑性屈服准则中的屈服应力  $\sigma_s$ 。当裂纹长度损伤度因子  $f=1$  时,  $\sigma_{y\max}$  等于  $\sigma_t$ , 抗拉强度  $\sigma_t$  是岩石裂纹长度达到最大时的岩石抗拉屈服强度, 实际试验时可以采用慢速加载的极限强度近似表示, 即:

$$\sigma_{y\max} = \begin{cases} \sigma_f & f = 1 \\ \sigma_s & f = 0 \end{cases} \quad (26)$$

断裂力学认为, 材料达到断裂韧度  $K_{IC}$  时裂纹失稳扩展, 即:

$$K_{IC} = \sigma_{y\max} \sqrt{\pi c} \quad (27)$$

将式 (2) 代入, 得到:

$$\sigma_{y\max} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c_m f}} = \frac{\mu}{\sqrt{f}} \quad (28)$$

式中:  $\eta = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c_m}}$ , 因此, 含裂纹单元的抗拉强度与裂

纹长度损伤因子的关系如图 14 曲线 1。实际上裂纹长度损伤度因子为 0, 即裂纹长度为 0 的岩石抗拉强度不可能无穷大。假设不考虑裂纹非常小的情况, 针对  $0.2 < f < 1$  的大部分情况, 可以近似处理, 采用曲线 2 近似代替曲线 1。因此, 式(28)在实际简化计算时, 可以采用如下公式近似计算:

$$\sigma_{y_{\max}} = f\sigma_f + (1-f)\sigma_s = -(\sigma_s - \sigma_f)f + \sigma_s \quad (29)$$

图 14 显示  $0.3 < f < 1$  的大部分情况, 式(29)计算所得抗拉屈服强度稍大于实际强度, 并随着损伤的加剧, 即  $f$  变大, 岩石的抗拉强度减小。

#### 4.6 初始损伤下岩石裂纹失稳扩展临界应变计算

当岩石试样  $a_1 \times a_2$  范围内有条裂纹时, 裂纹张开导致的体(面)应变增量为:

$$\Delta\varepsilon_{\max} = \frac{i\Delta A_{\max}}{a_1 a_2} = \frac{8ic^2(\sigma_s^2 + \sigma_{y_{\max}}^2)}{E\sigma_s a_1 a_2} \quad (30)$$

裂纹失稳扩展临界状态对应时岩石的状态, 此时  $\sigma_{y_{\max}} = \sigma_f$ ,  $c = c_m$ , 并结合式(1), 式(30)可写成:

$$\Delta\varepsilon_{\max} = \frac{8\rho c_m^2(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}{E\sigma_s} \quad (31)$$

式中:  $\Delta\varepsilon_{\max}$  表示裂纹处于失稳临界状态时裂纹扩展导致的岩石体应变增量;  $\rho$  是单位面积内裂纹数量,  $m^{-2}$ ;  $c_m$  是裂纹半长,  $m$ ;  $E$  是岩石弹性模量,  $MPa$ ;  $\sigma_s$  是岩石内在抗拉强度,  $MPa$ ;  $\sigma_f$  是损伤度达到最大时的岩石抗拉屈服强度,  $MPa$ 。

式(31)显示, 岩石轴拉下应变增量主要受初始损伤的影响, 如果不考虑受拉过程中新裂纹的增加, 则岩石变形破坏过程可以采用式(31)进行预测计算, 为工程中岩石破坏过程控制提供理论支撑。

显然,  $\rho$  和  $c_m$  相互影响制约,  $\rho c_m^2$  是与岩石初始损伤有关的定值, 令  $D_p = 8\rho c_m^2$ , 称之为初始损伤系数, 则式(31)可写成:

$$\Delta\varepsilon_{\max} = \frac{D_p(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}{E\sigma_s} \quad (32)$$

由于岩石只受单轴拉应力, 裂纹失稳扩展临界体应变增量转化为轴向应变为:

$$\Delta\varepsilon'_{\max} = \frac{D_p(\sigma_s^2 + \sigma_f^2)}{(1-\lambda)E\sigma_s} \quad (33)$$

定义抗拉强度比  $\varphi = \frac{\sigma_f}{\sigma_s}$ , 式(33)可写成:

$$\Delta\varepsilon'_{\max} = \frac{D_p(1+\varphi^2)}{(1-\lambda)E}\sigma_s \quad (34)$$

弹性应变为:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_f}{E} = \frac{\varphi}{E}\sigma_s \quad (35)$$

裂纹失稳扩展临界轴向应变加上弹性应变, 即为岩石受拉失稳临界状态总应变:

$$\varepsilon_{\text{all}} = \Delta\varepsilon'_{\max} + \varepsilon_e = \left[ \frac{D_p(1+\varphi^2)}{(1-\lambda)E} + \frac{\varphi}{E} \right] \sigma_s \quad (36)$$

#### 4.7 岩石变形模量的计算

含裂纹单元的岩石模量为基质弹性模量, 如果在进行弹塑性数值模拟分析时, 应该采用等效的变形模量。因此, 可以假设裂纹开裂的临界应变为弹塑性的屈服点, 则计算出采用弹塑性分析时的等效变形模量。变形模量的计算公式为  $E_d = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_{\text{all}}}$ 。岩石弹性模量  $E$  和内在抗拉强度  $\sigma_s$  都是岩石自身特性决定的, 与加载历史关系不大, 二者之间的相关性可能会影响变形模量的计算, 因此分两种情况分析:

(1) 岩石弹性模量  $E$  与内在抗拉强度  $\sigma_s$  无关时

$$E_d = \frac{\varphi\sigma_s}{\frac{D_p(1+\varphi^2)}{(1-\lambda)E}\sigma_s + \frac{\varphi}{E}\sigma_s} = \frac{(1-\lambda)\varphi E}{D_p(1+\varphi^2) + (1-\lambda)\varphi} \quad (37)$$

式中:  $E_d$  是岩体变形模量,  $\varphi = \frac{\sigma_f}{\sigma_s}$  是抗拉强度比,  $E$  是岩石弹性模量,  $D_p$  是岩石初始损伤系数,  $\lambda$  是岩石泊松比。

(2) 岩石弹性模量  $E$  与内在抗拉强度  $\sigma_s$  相关时

实际岩石弹性模量与抗拉强度有相关性, 根据张绪涛等<sup>[4]</sup>的试验研究结果, 不同岩石弹性模量与内在抗拉强度基本成线性关系, 如图 15 所示。

图 15 显示, 不同岩石弹性模量与内在抗拉强度基本成线性关系, 并且斜率相差不大, 采用砂岩和花岗岩数据, 可取岩石内在抗拉强度与拉伸弹性模量的关系大致为:

$$\sigma_s = 0.0001E \quad (38)$$

代入式(36)得到:

$$\Delta\varepsilon'_{\max} = \frac{D_p}{(1-\lambda)} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_f}{0.0001E} \right)^2 \right] \times 10^{-4} \quad (39)$$

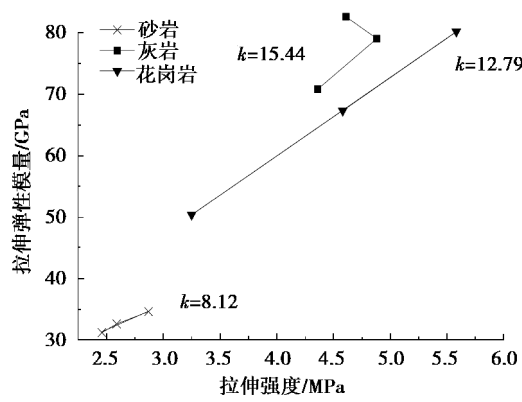


图 15 内在抗拉强度与拉伸弹性模量的关系图

Fig. 15 Diagram of relationship between inherent tensile strength and tensile elastic modulus

总应变为:

$$\varepsilon_{all} = \frac{D_p}{(1-\lambda)} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_f}{0.0001E} \right)^2 \right] \times 10^{-4} + \frac{\sigma_f}{E} \tag{40}$$

$$E_d = \frac{\sigma_f}{\frac{D_p}{(1-\lambda)} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_f}{0.0001E} \right)^2 \right] \times 10^{-4} + \frac{\sigma_f}{E}} \tag{41}$$

式中: $E_d$ 是岩体变形模量; $\sigma_f$ 是裂纹长度达到最大的岩石抗拉屈服强度; $E$ 是岩石弹性模量; $D_p$ 是岩石初始损伤系数; $\lambda$ 是岩石泊松比。

4.8 算例分析

基于花岗岩的拉伸试验研究,应力应变关系如图 16 所示,应力达到极限拉应力时,岩石开始破坏,高应变率情况下,岩石内部裂纹来不及萌生,扩展,此时的极限拉应力比较接近真实的内在抗拉强度,因此取高应变率试验极限抗拉强度近似为 $\sigma_s = 13.7\text{ MPa}$ ,岩石低应变率拉伸试验裂纹逐渐扩展,一旦裂纹之间相互影响,岩石趋于破坏,所以取低应变率时的极限抗拉强度为 $\sigma_f = 9\text{ MPa}$ ,岩石基质弹性模量 $E = 137\text{ GPa}$ ,泊松比 $\lambda = 0.2$ 。

根据图 16 实测数据,该岩样损伤达最大时对应的临界抗拉强度为 $9\text{ MPa}$ ,此时的实测割线变形模量为 $46.08\text{ GPa}$ 。

假设岩样抗拉强度为 $9\text{ MPa}$ ,初始损伤系数 $D_p$ 分别等于 $0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ 。根据式(40)总应变 $\varepsilon_{all}$ 和割线变形模量的计算结果如图 17 所示。根据式(33)计算等效塑性应变,式(35)计算弹性应变,计算结果见表 1。

图 17 和表 1 显示,在岩样相同的抗拉强度时,初始损伤越大,总应变越大,即岩体强度虽然相同,

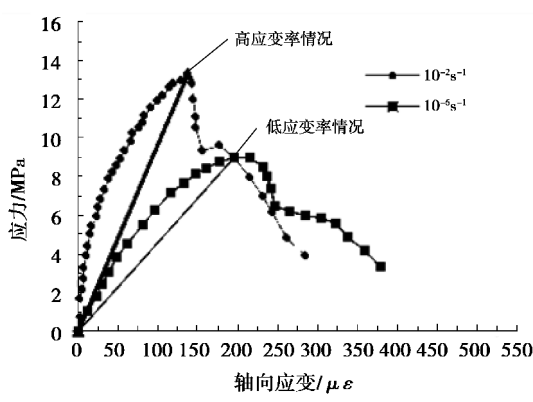


图 16 不同应变率下花岗岩拉伸试验轴向应力-应变曲线

Fig.16 Stress-strain curves of tensile granite test under various strain rate

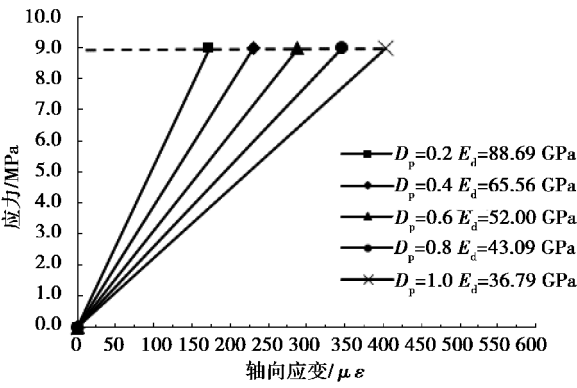


图 17 不同岩石初始损伤系数下轴向应力-应变曲线

Fig.17 Stress-strain curves under various rock initial damage coefficient

但越破碎的岩体,变形越大,变形模量越小。

表 1 相同应力,不同初始损伤条件下的弹性应变,等效塑性应变,等效割线模量

Table 1 Elastic strain, equivalent plastic strain, equivalent secant modulus under same stress, various initial damage condition

$D_p$	弹性应变 / $\mu\varepsilon$	等效塑性 应变/ $\mu\varepsilon$	等效割线 模量/GPa
0.2	65.69	35.79	88.69
0.4	65.69	71.58	65.56
0.6	65.69	107.37	52.00
0.8	65.69	143.16	43.09
1	65.69	178.95	36.79



根据式(41)计算出不同抗拉强度不同初始损伤(即破碎程度)岩体的等效变形模量如图18。

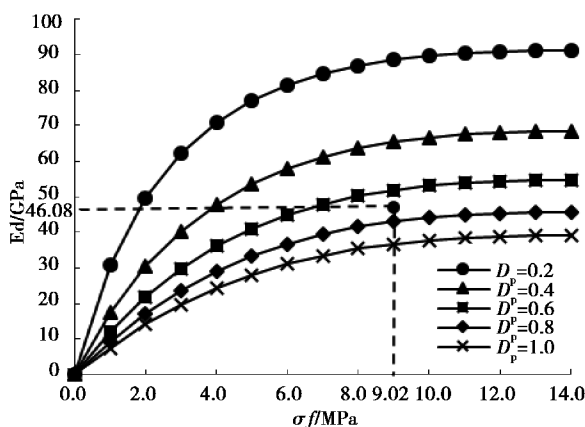


图18 不同应力下的岩体变形模量

Fig.18 Deformation modulus of rock under various stress

图18显示,岩体的变形模量随着岩体的初始损伤增加而减小,随着裂纹长度损伤因子的增大而减小,该规律与实际情况基本一致。结合实测岩样强度为9 MPa时对应的变形模量为46.08 GPa,可以反算出该岩样的初始损伤因子 $D_p$ 为0.6358。因此,采用本文计算公式可以反算岩样的初始损伤程度,当然本文公式是理想均匀分布条件下获得,并且式(29)采用了线性近似计算,有一定误差,但本文通过提出初始损伤与裂纹长度损伤因子两部分描述岩样的总体损伤状态,概念更加清晰,能有效描述岩体变形不仅受初始裂纹的数量控制,而且受裂纹长度控制的特点,可以为研究岩石强度损伤理论提供参考。

## 5 结论

(1)采用COD理论可以建立考虑裂纹张开效应的损伤岩石变形模量理论计算方法。推导了岩石内在抗拉强度与弹性模量的相关和非相关情况下含裂纹损伤岩石变形模量计算公式。分析显示,岩石裂纹张开引起的应变(包括弹性部分和塑性部分)是损伤岩石变形的重要组成部分(见式(36)),与初始损伤系数和内在抗拉强度成正比,与岩石基质弹性模量成反比,岩石的变形模量随着岩石的初始损伤增加而减小,随着裂纹长度损伤因子的增大而减小,并且初始损伤系数与初始裂纹密度以及裂纹最大半长的平方均成正比。

(2)理论分析把含裂纹岩石的损伤分为裂纹密度和裂纹长度两个部分,能有效描述岩石变形不仅受初始裂纹的数量控制,而且受裂纹长度控制的实际特点。结合试验数据分析显示:本方法计算结果还可以有效地判断岩石破坏时的临界状态,结合实际工程,可以为有效确定隧道工程中位移安全控制值提供参考。根据实际位移量测,可以预测围岩安全性,为防止围岩坍塌,保证围岩稳定性提供科学计算方法和依据,实际试验结果数据与理论计算结果基本一致,验证了本方法的合理性。

## 参考文献(References)

- [1] 李杰,王明洋,张宁,等.裂隙岩体动态损伤演化与体积扩容方程[J].岩石力学与工程学报,2015,34(8): 1532-1541. (Li Jie, Wang Mingyang, Zhang Ning, et al. An equation for damage development and volumetric dilation of cracked rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, 34(8): 1532-1541. (in Chinese))
- [2] Hoek E, Bieniawski Z T. Brittle fracture propagation in rock under compression[J]. International Journal of Fracture, 1965, 1(3): 137-155.
- [3] Lockner D A, Byerlee J D, Kuksenko V, et al. Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite[J]. Nature, 1991, 350(7): 39-42.
- [4] 张绪涛,张强勇,袁圣渤,等.岩石轴向直接拉伸试验装置的研制及应用[J].岩石力学与工程学报,2014, 33(12): 2517-2523. (Zhang Xutao, Zhang Qiangyong, Yuan Shengbo, et al. Development of test device for direct axial tension[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(12): 2517-2523. (in Chinese))
- [5] Okubo S, Fukui K. Complete stress-strain curves for various rock types in uniaxial tension[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1996, 33(6): 549-556.
- [6] 王瑶,吴胜兴,周继凯,等.花岗岩动态轴向拉伸力学性能试验研究[J].岩石力学与工程学报,2010, 29(11): 2328-2336. (Wang Yao, Wu Shengxing, Zhou Jikai, et al. Experimental study of dynamic axial tensile mechanical properties of granite[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(11): 2328-2336. (in Chinese))

- [7] Kranz R L. Crack growth and development during creep of Barre granite [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1979, 16(1): 23-35.
- [8] 席婧仪,陈忠辉,朱帝杰,等.岩石不等长裂纹应力强度因子及起裂规律研究[J].岩土工程学报,2015,27(4):727-733.(Xi Jingyi, Chen Zhonghui, Zhu Dijie, et al. Stress intensity factors and initiation of unequal collinear cracks in rock [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 27(4): 727-733. (in Chinese))
- [9] Castro J, Cicero S, Sagaseta C. A criterion for brittle failure of rocks using the theory of critical distances[J]. Rock Mechanics & Rock Engineering, 2016, 49(1): 1-15.
- [10] 杨昊天,于兴国,王璐,等.不同加、卸载条件下片岩的变形特性试验研究[J].地下空间与工程学报,2016,12(2):381-386.(Yang Haotian, Yu Xingguo, Wang Lu, et al. Experimental Research on Detormation Characteristics of Schist under Different Loading and Unloading Conditions [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2016, 12(2): 381-386.(in Chinese))
- [11] Shen J Y, Karakus M, Xu C S. A comparative study for empirical equations in estimating deformation modulus of rock masses [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2012, 32(1): 245-250.
- [12] 闫长斌,杜卫长.基于分层计算的层间剪切带原位变形试验研究[J].地下空间与工程学报,2014,10(5):1059-1064,1085.(Yan Changbin, Du Weichang. Study on In-situ Deformation Test of Interlayer Shear Zone Basedon Divided Layer Calculation[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2014, 10(5): 1059-1064, 1085. (in Chinese))
- [13] 蒋小伟,万力,王旭升,等.利用 RQD 估算岩体不同深度的平均渗透系数和平均变形模量[J].岩土力学,2009,30(10):3163-3168.(Jiang Xiaowei, Wan Li, Wang Xusheng, et al. Estimation of depth-dependent hydraulic conductivity and deformation modulus using RQD[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009 30(10): 3163-3168. (in Chinese))
- [14] Chun B S, Yong J L, Seo D D, et al. Correlation deformation modulus by PMT with RMR and rock mass condition [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2006, 21(1): 231-232.
- [15] Barton N. Some new Q-value correlations to assist in site characterization and tunnel design [J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2002, 39(2): 185-216.
- [16] 李维树,黄志鹏,谭新.水电工程岩体变形模量与波速相关性研究及应用[J].岩石力学与工程学报,2010,29(增1):2727-2733.(Li Weishu, Huang Zhipeng, Tan Xin. Research and application of correlation between deformation modulus and wave velocity of rock mass in hydroelectric project [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(Supp.1): 2727-2733. (in Chinese))
- [17] 杨建平,陈卫忠,戴永浩.裂隙岩体变形模量尺寸效应研究 I:有限元法[J].岩土力学,2011,32(5):1538-1546.(Yang Jianping, Chen Weizhong, Dai Yonghao. Study of scale effect of deformation modulus of fractured rock mass (part I): Finite Element Method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(5): 1538-1546. (in Chinese))
- [18] 王士民,刘丰军,叶飞,等.含预制裂纹脆性岩石破坏数值模拟研究[J].岩土力学,2006,27(增1):235-238.(Wang Shimin, Liu Fengjun, Ye Fei, et al. The numerical simulation to model fallure of brittle rock with prefab crack[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(Supp.1): 235-238. (in Chinese))
- [19] 潘鹏志,丁梧秀,冯夏庭,等.预制裂纹几何与材料属性对岩石裂纹扩展的影响研究[J].岩石力学与工程学报,2008,27(9):1882-1889.(Pan Pengzhi, Ding Wuxiu, Feng Xiating, et al. Research on influence of pre-existing crack geometrical and material properties on crack propagation in rocks[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(9): 1882-1889. (in Chinese))
- [20] Lawn B.脆性固体断裂力学[M].北京:高等教育出版社,2010.(Lawn B. Fracture of brittle solids [M]. Beijing:Higher Education Press, 2010.(in Chinese))