

弯曲试验确定岩石单轴抗拉强度的新方法^{*}

吕爱钟,王浩宇,蔡辉

(华北电力大学 水电与岩土工程研究所,北京 102206)

摘 要:岩石的单轴抗拉强度是岩石的一个重要力学参数。四点弯曲试验法是获取岩石单轴抗拉强度的一种间接方法,但四点弯曲试验的传统公式计算出来的单轴抗拉强度往往比实际的单轴抗拉强度大得多,有时甚至是直接拉伸试验抗拉强度的2~3倍。因此,需要对传统公式进行改进,得出新的抗拉强度计算公式,并在四点弯曲试验中获得与实际比较符合的单轴抗拉强度。在岩石拉压模量不同的基础上,考虑岩石破坏前的塑性变形行为,通过弹塑性力学的方法精确地推导出四点式弯曲试验的单轴抗拉强度计算公式,并分析了新的抗拉强度计算公式的结果,获得与实际情形比较符合的岩石单轴抗拉强度。

关键词:拉压弹性模量;塑性变形;四点弯曲试验;单轴抗拉强度

中图分类号:O344.3

文献标识码:A

文章编号:1673-0836(2018)06-1452-06

A New Method for Determination of Uniaxial Tensile Strength of Rock through Bending Test

Lü Aizhong, Wang Haoyu, Cai Hui

(Institute of Hydroelectric and Geotechnical Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, P.R.China)

Abstract: The uniaxial tensile strength of rock is an important mechanical parameter. The four-point bending test method is an indirect method for obtaining the uniaxial tensile strength of rock. But the uniaxial tensile strength calculated by the traditional formula of the four-point bending test is often much greater than the actual uniaxial tensile strength, and sometimes is even 2~3 times the tensile strength of the direct tensile test. Therefore, it is necessary to improve the traditional formula to derive a new tensile strength calculation formula, and obtain a uniaxial tensile strength that is in line with the actual one in the four-point bending test. On the basis of different tension and compression modulus of rocks, the plastic deformation behavior before rock failure is considered, and the uniaxial tensile strength calculation formula of the four-point bending test is accurately deduced by the elasto-plastic mechanics method. The results of the new tensile strength calculation formula were analyzed and the uniaxial tensile strength of the rock, which was in line with the actual situation, was obtained.

Keywords: tensile and compression modulus; plastic deformation; four-point bending test; uniaxial tensile strength

0 引言

岩石的单轴抗拉强度仅仅为其单轴抗压强度

的 $1/20 \sim 1/3$ ^[1],所以岩石在拉应力作用下极易产生拉伸破坏。很多岩石工程失稳往往都是因为岩石部分区域发生拉伸破坏或拉剪破坏所致,因此工

^{*} 收稿日期:2018-04-31(修改稿)

作者简介:吕爱钟(1961-),男,山东文登人,博士,教授,主要从事岩石力学方面的教学与研究工作。

E-mail:lvaizhong@ncepu.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金(11572126)

程设计往往都把抗拉强度作为一个重要的力学参数。有许多方法可以获得岩石的抗拉强度,方法主要分为两类,一类是直接拉伸试验,另一类是间接拉伸试验。

通过直接拉伸试验确定单轴抗拉强度是一件较为困难的事,所获取的抗拉强度离散性一般较大^[2]。甚至有些人认为岩石的单轴抗拉强度不应该作为一个独立的材料参数^[3]。但随着高强度粘结剂的发明和试验机的改进,部分学者又对岩石直接拉伸试验进行了一些较为深入的研究,并取得了相当客观的研究成果^[4]。

通过间接拉伸试验确定单轴抗拉强度是经常采用的方法,常用的间接拉伸试验主要有巴西试验和弯曲试验,由于巴西试验中圆盘的破坏是在两向应力状态下的作用结果,而并非为单向受拉状态下的拉伸破坏,再加上圆盘的破坏有时不是从圆盘拉应力处开裂,而是从荷载作用点开始,所以有人认为巴西劈裂试验所得的抗拉强度和直接拉伸试验所得的抗拉强度结果存在着不容忽视的差异^[5-7];而由弯曲试验法获得的抗拉强度比实际的抗拉强度往往大得多,有时可达到直接拉伸试验抗拉强度的2~3倍^[8]。一般认为引起差异的主要原因是忽略了岩石拉压弹性模量不同和岩石破坏前存在塑性变形这两个因素^[9]。

岩石的压缩弹性模量 E^- 一般都大于拉伸弹性模量 E^+ ^[10-12], E^-/E^+ 大都为1~6,有时甚至高达20,所以在推导岩石弯曲试验的抗拉强度公式时必须考虑这个因素。在梁的纯弯曲分析中,已经获得了拉压模量不同时的应力解析解^[13],在梁的平截面假定下又相继得到了横力弯曲梁和悬臂梁的解析解^[14-15],有些成果已经用于岩石的纯弯曲试验^[16]。

岩石破坏前塑性变形区对抗拉强度的影响也必须考虑,传统的弯曲试验采用了梁的弯曲理论,认为梁最下层的应力达到屈服应力 σ_1 (抗拉强度)时,梁即产生破坏,这不符合实际情况,因为当梁最下层的应力达到抗拉强度 σ_1 时,而其他点都处于弹性状态,这时梁肯定处于稳定状态。这只是一个弹性极限状态,试验中无法识别外荷载 P 达到多大值时,梁才进入这个状态,本文将弹性极限状态

对应的外荷载记为 P_e 。由塑性力学可知,当受拉区外边缘的岩石达到其抗拉强度时,由于材料具有塑性变形的能力,因此还不会马上开裂。随着外荷载的增加,塑性区域将从梁的下部不断向上面发展^[17],当外荷载增加到某一个值时,拉应力区域发展到一定程度时,梁将产生断裂破坏^[18-19],此时对应的荷载就是极限荷载 P_{\max} ,外荷载再也加不上去了,应该由这个状态来计算岩石的抗拉强度。

本文将在岩石拉压模量不同的基础上,考虑岩石破坏前的塑性变形行为,不用梁的平截面假定,而直接通过弹塑性力学的精确方法推导出四点式弯曲试验的抗拉强度计算公式,从而可以获得与实际情形比较符合的岩石单轴抗拉强度。

1 应力和位移的弹性解

1.1 基本假定

图1为长方形岩石试件的四点弯曲试验简图,在岩石试件的中间矩形区域 $abcd$,试件每个截面受到的弯矩都是相同的,其值都为 $M=P(L-l)$ 。设 y 轴为岩石试件纵向方向的对称轴, x 轴以上为受压区, x 轴以下为受拉区,即 x 轴为岩石试件的中性轴。若 $E^- = E^+$ 时,则 x 轴为试件横向方向的对称轴,而 $E^- > E^+$ 时, x 轴以下的受拉区高度一定大于 x 轴以上的受压区高度。

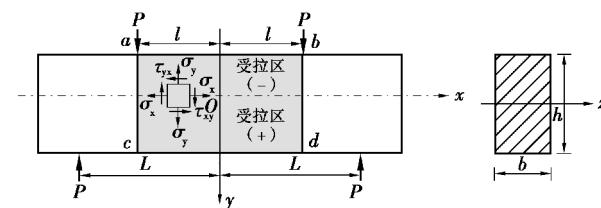


图1 四点弯曲试验简图

Fig.1 Four-point bending test diagram

根据岩石试件中间区域 $abcd$ 上下边界的应力边界条件,可假定在此区域每点都有 $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$,并假定岩石试件的厚度为 b ,当 b 的值较小时, $\sigma_z = 0$,这是一个平面应力问题。这时只存在 σ_x ,且假定 σ_x 只是 y 的函数。因为所假定的应力分量满足平衡方程和试件上下边界的应力边界条件,所以若能根据变形协调方程求出合理的 σ_x ,则以上的假定就是合理的。由后面的分析可知,本文的假定是正确的。

1.2 应力解析解

记 $\varepsilon_x^+, \varepsilon_y^+, \gamma_{xy}^+$ 和 $\varepsilon_x^-, \varepsilon_y^-, \gamma_{xy}^-$ 分别为受拉区和受压区的应变分量, $\sigma_x^+, \sigma_y^+, \tau_{xy}^+$ 和 $\sigma_x^-, \sigma_y^-, \tau_{xy}^-$ 分别为两区相应的应力分量, E^+ 和 E^- 分别为岩石的拉压弹性模量, 则将 $\sigma_z = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ 代入胡克定律可得:

$$\varepsilon_x^+ = \frac{\sigma_x^+}{E^+}, \varepsilon_y^+ = -\frac{\mu^+ \sigma_x^+}{E^+}, \gamma_{xy}^+ = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon_x^- = \frac{\sigma_x^-}{E^-}, \varepsilon_y^- = -\frac{\mu^- \sigma_x^-}{E^-}, \gamma_{xy}^- = 0 \quad (2)$$

将式(1)、式(2)分别代入平面问题的相容方程 $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$ 可得:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x^+}{\partial y^2} = \mu^+ \frac{\partial^2 \sigma_x^+}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x^-}{\partial y^2} = \mu^- \frac{\partial^2 \sigma_x^-}{\partial x^2} \quad (4)$$

积分式(3)、式(4)可得:

$$\sigma_x^+ = A_1 y + B_1 \quad (5)$$

$$\sigma_x^- = A_2 y + B_2 \quad (6)$$

式中: A_1, A_2, B_1, B_2 为待定常数。因 x 轴为中性轴, 则当 $y=0$ 时, $\sigma_x^+ = 0, \sigma_x^- = 0$, 由此可得: $B_1 = B_2 = 0$ 。则式(5)、式(6)为:

$$\sigma_x^+ = A_1 y \quad (7)$$

$$\sigma_x^- = A_2 y \quad (8)$$

由受拉区和受压区交界处法向的位移连续条件可以获得 A_1 与 A_2 之间的关系, 它们的大小取决于截面弯矩 M , 可以由截面的平衡条件获得。

1.3 位移解析解

记 u, v 分别为 x 和 y 方向的位移, u^+, v^+ 和 u^-, v^- 分别为受拉区和受压区的位移分量, 则将式(1)、式(2)代入几何方程, 并利用式(7)、式(8)可得:

$$\varepsilon_x^+ = \frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\sigma_x^+}{E^+} = \frac{A_1 y}{E^+} \quad (9)$$

$$\varepsilon_x^- = \frac{\partial u^-}{\partial x} = \frac{\sigma_x^-}{E^-} = \frac{A_2 y}{E^-} \quad (10)$$

$$\varepsilon_y^+ = \frac{\partial v^+}{\partial y} = -\frac{\mu^+ \sigma_x^+}{E^+} = -\frac{\mu^+}{E^+} A_1 y \quad (11)$$

$$\varepsilon_y^- = \frac{\partial v^-}{\partial y} = -\frac{\mu^- \sigma_x^-}{E^-} = -\frac{\mu^-}{E^-} A_2 y \quad (12)$$

积分式(9)~(12)可得:

$$u^+ = \frac{A_1 y}{E^+} x + f_1(y) \quad (13)$$

$$u^- = \frac{A_2 y}{E^-} x + f_2(y) \quad (14)$$

$$v^+ = -\frac{\mu^+ A_1}{2E^+} y^2 + g_1(x) \quad (15)$$

$$v^- = -\frac{\mu^- A_2}{2E^-} y^2 + g_2(x) \quad (16)$$

式中: $f_1(y), f_2(y), g_1(x), g_2(x)$ 是待定函数。由梁的对称性可得: 当 $x=0$ 时, $u=0$ 。则由式(13)和式(14)可得: $f_1(y) = f_2(y) = 0$, 且在受拉区和受压区的交界处 ($y=0$), 每一点都有 $u^+ = u^- = 0$, 即 x 方向的位移是连续的。

从而在受拉区和受压区, 沿 x 方向的位移分量分别为:

$$u^+ = \frac{A_1 y}{E^+} x \quad (17)$$

$$u^- = \frac{A_2 y}{E^-} x \quad (18)$$

为了求得 $g_1(x), g_2(x)$, 可将式(13)~(16)代入几何方程 $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$ 中, 可得:

$$\frac{A_1}{E^+} x + \frac{dg_1(x)}{dx} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{A_2}{E^-} x + \frac{dg_2(x)}{dx} = 0 \quad (20)$$

对式(19)、式(20)积分可得:

$$g_1(x) = -\frac{A_1}{2E^+} x^2 + B \quad (21)$$

$$g_2(x) = -\frac{A_2}{2E^-} x^2 + D \quad (22)$$

式中: B, D 也是待定常数, 它们代表的是 y 方向的刚体平移。由受拉区和受压区的交界处 $y=0$ 的位移连续条件 $v^+|_{y=0} = v^-|_{y=0}$ 可得: $g_1(x) = g_2(x)$ 。再由式(21)、式(22)可得:

$$B = D \quad (23)$$

$$\frac{A_1}{E^+} = \frac{A_2}{E^-} \quad (24)$$

不失一般性,可令 $x=0, y=0$ 处的 $v=0$, 则可得 $B=0$ 。式(24)给出的是 A_1 和 A_2 的关系, A_1 和 A_2 的大小可根据截面的平衡条件求出。

从而在受拉区和受压区,沿 y 方向的位移分量分别为:

$$v^+ = -\frac{\mu^+ A_1}{2E^+} y^2 - \frac{A_1}{2E^+} x^2 \quad (25)$$

$$v^- = -\frac{\mu^- A_2}{2E^-} y^2 - \frac{A_2}{2E^-} x^2 \quad (26)$$

2 抗拉强度的解析解

2.1 塑性区和弹性区中的应力

当岩石试件开始破坏时,试件的受拉区会产生塑性变形,但由于岩石的抗压强度远远大于抗拉强度,所以在试件的受压区一般不会产生屈服。虽然岩石是脆性材料,无法产生较大的塑性变形,但是在岩石受拉区还是会有小部分区域产生塑性变形(图2)。根据研究表明,塑性变形高度 h_t 与岩石的最大颗粒尺寸 d_{\max} 有关^[18-19]。 h_t 也应该与试件高度 h 有关, h 越大, h_t 应该越大。

当假定岩石是理想弹塑性材料时,则在整个塑性区都有 $\sigma_x = \sigma_t$ ^[17],其他应力分量都等于零。在对梁进行弹塑性分析时,一般都认为塑性区的存在不会影响弹性区的应力分布规律^[17],即在弹性区的应力分量 σ_x 仍然具有式(7)、式(8)的形式。

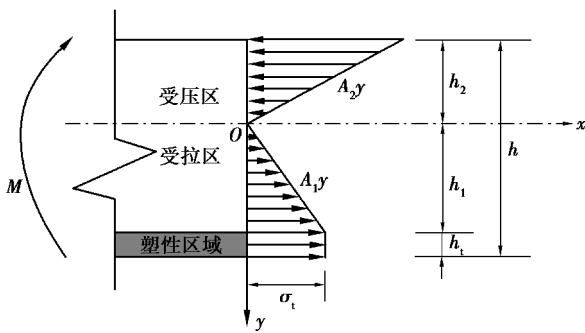


图2 弯曲试验岩石试件破坏时所对应的应力状态

Fig.2 Stress state corresponding to destruction of rock specimen during bending test

2.2 抗拉强度的 σ_t 的确定

由试件截面的平衡条件可列出:

$$\int_{-h_2}^0 A_2 y b dy + \int_0^{h_1} A_1 y b dy + \int_{h_1}^{h_1+h_t} \sigma_t b dy = 0 \quad (27)$$

$$\int_{-h_2}^0 A_2 y^2 b dy + \int_0^{h_1} A_1 y^2 b dy + \int_{h_1}^{h_1+h_t} \sigma_t y b dy = M_{\max} \quad (28)$$

式中: $M_{\max} = P_{\max}(L-l)$ 。

将式(24)和 $\sigma_t = A_1 h_1$ 代入式(27)得:

$$h_1^2 + 2h_1 h_t - \frac{E^-}{E^+} h_2^2 = 0 \quad (29)$$

式中: h_1 是受拉区的高度减去塑性区的高度 h_t ; h_2 是受压区的高度。

从图2可看出 $h_2 = h - h_1 - h_t$, 将 $h_2^2 = (h - h_1 - h_t)^2$ 代入式(29)可得:

当 $E^+ = E^-$ 时,

$$h_1 = \frac{(h - h_t)^2}{2h} \quad (30)$$

当 $E^+ \neq E^-$ 时:

$$h_1 = \frac{h_t + \frac{E^-}{E^+}(h - h_t) - \sqrt{h_t^2 - \frac{E^-}{E^+}h_t^2 + \frac{E^-}{E^+}h^2}}{\frac{E^-}{E^+} - 1} \quad (31)$$

由式(29)可得:

$$h_2 = \sqrt{\frac{E^+}{E^-}(h_1^2 + 2h_1 h_t)} \quad (32)$$

由式(28)可得岩石的抗拉强度 σ_t 为:

$$\sigma_t = \frac{6M_{\max}}{2h_1 h b + h_t(4h - h_t)b} = \frac{6P_{\max}(L-l)}{2h_1 h b + h_t(4h - h_t)b} \quad (33)$$

3 与传统抗拉强度公式的比较

在推导传统抗拉强度公式时,没有考虑岩石拉压模量的不同和塑性变形的影响,抗拉强度 σ'_t 的计算公式为

$$\sigma'_t = \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \frac{6P_{\max}(L-l)}{bh^2} \quad (34)$$

则本文抗拉强度 σ_t 与传统抗拉强度 σ'_t 之比为

$$\frac{\sigma_t}{\sigma'_t} = \frac{h^2}{2h_1 h + h_t(4h - h_t)} = \frac{1}{2\frac{h_1}{h} + 4\frac{h_t}{h} - \left(\frac{h_t}{h}\right)^2} \quad (35)$$

式中: h_l/h 由式(30)、式(31)可以写为

当 $E^+ = E^-$ 时:

$$\frac{h_l}{h} = \frac{\left(1 - \frac{h_l}{h}\right)^2}{2} \quad (36)$$

当 $E^+ \neq E^-$ 时:

$$\frac{h_l}{h} = \frac{\frac{h_l}{h} + \frac{E^-}{E^+} \left(1 - \frac{h_l}{h}\right) - \sqrt{\left(\frac{h_l}{h}\right)^2 \left(1 - \frac{E^-}{E^+}\right) + \frac{E^-}{E^+}}}{\frac{E^-}{E^+} - 1} \quad (37)$$

由式(35)~(37)可以看出: σ_l/σ'_l 的大小仅取决于 E^-/E^+ 和 h_l/h 的比值; E^-/E^+ 和 h_l/h 的比值越大, σ_l/σ'_l 的比值越小; 当 $E^+ = E^-$, $h_l = 0$ 时, $\sigma_l = \sigma'_l$, 这正是我们可以预料到的结果。由式(35)~(37)可以证明, 无论 h_l/h 多大, 当 $E^-/E^+ \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_l/\sigma'_l \rightarrow 1/2$; 无论 E^-/E^+ 多大, 当 $h_l \rightarrow h$ 时, $\sigma_l/\sigma'_l \rightarrow 1/3$ 。

下面通过算例分析 $E^- \geq E^+$, $h_l \geq 0$ 时, σ_l/σ'_l 关于 E^-/E^+ 和 h_l/h 的变化规律。假定 E^-/E^+ 在 1.0 到 20 的范围内取值, h_l/h 分别取为 0.0、0.05、0.10、0.15、0.20、0.25、0.3, σ_l/σ'_l 的计算结果如表 1 所示。

表 1 σ_l/σ'_l 与 E^-/E^+ 和 h_l/h 之间的关系

Table 1 Respective relationship between σ_l/σ'_l and E^-/E^+ , h_l/h

$\frac{E^-}{E^+}$	h_l/h						
	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
1	1.000	0.909	0.833	0.769	0.714	0.667	0.625
2	0.854	0.789	0.738	0.697	0.663	0.634	0.611
3	0.789	0.733	0.687	0.649	0.618	0.591	0.568
4	0.750	0.699	0.657	0.622	0.592	0.567	0.546
6	0.704	0.659	0.621	0.590	0.563	0.539	0.519
8	0.677	0.635	0.600	0.570	0.545	0.523	0.504
10	0.658	0.618	0.585	0.557	0.532	0.511	0.493
15	0.629	0.593	0.562	0.536	0.513	0.494	0.477
20	0.612	0.577	0.548	0.523	0.501	0.483	0.466

由表 1 可以看出:

当 $h_l/h = 0$ 时, 当 $E^-/E^+ \geq 8$ 时, 随着 E^-/E^+ 的

比值的增大, σ_l/σ'_l 下降的速度很慢。通过计算发现, 当 $E^-/E^+ \geq 20$ 后, σ_l/σ'_l 的比值为 0.6 左右。

当 $h_l/h = 0.3$ 时, $E^-/E^+ = 1$ 对应的 $\sigma_l/\sigma'_l = 0.625$, 而 $E^-/E^+ = 6$ 对应的 $\sigma_l/\sigma'_l = 0.519$ 。即对 $E^-/E^+ \leq 6$ 的大部分岩石, 当 $h_l/h = 0.3$ 时, 通过本文方法计算出来的 σ_l 与传统公式计算的 σ'_l 相比, 最多可下降 50% 左右。

4 结论

传统抗拉强度 σ'_l 计算公式不包含岩石弹性模量这个参数, 在推导公式时利用了岩石压缩弹性模量 E^- 等于拉伸弹性模量 E^+ 这个假定, 用此公式计算的岩石单轴抗拉强度 σ'_l 比实际的抗拉强度大很多。实际上, 岩石一般不满足 $E^- = E^+$ 这个假定, E^- 比 E^+ 大, 当考虑拉压弹模的差异性时, 获得的抗拉强度 σ_l 随着 E^-/E^+ 比值的增大而减小。

对于大部分岩石, $E^-/E^+ \leq 6$, 当不考虑塑性变形的影响时, 通过本文方法计算出来的抗拉强度 σ_l 与传统公式计算的抗拉强度 σ'_l 相比, 最多可下降 30% 左右, 但与实际的抗拉强度相比还是较大, 所以仅仅考虑拉压弹性模量不同是不够的, 还必须考虑塑性变形的影响。

当考虑岩石塑性变形的影响后, 通过本文方法计算的抗拉强度 σ_l 会进一步减小。随着塑性区高度 h_l 与截面高度 h 比值的增加, 按本文方法获得的 σ_l 会越来越小。对 $E^-/E^+ \leq 6$ 的大部分岩石, 当 $h_l/h = 0.3$ 时, 由本文方法获得的 σ_l 与传统公式计算的 σ'_l 相比, 最多可下降 50% 左右。

岩石的 E^-/E^+ 是可以通过试验确定的, 如果精确地知道了 h_l/h , 就可以通过本文提出的计算公式精确地计算出抗拉强度 σ_l , h_l/h 的大小与岩石的最大颗粒尺寸 d_{\max} 有关, 对于某一种具体的岩石, h_l/h 必须通过试验来确定。

参考文献 (References)

- [1] Sheorey P R, Biswas A K, Choubey V D. An empirical failure criterion for rocks and jointed rock masses[J]. Engineering Geology, 1989, 26(2): 141-159.
- [2] Coviello A, Lagioia R, Nova R. On the measurement of the tensile strength of soft rocks[J]. Rock Mechanics

- and Rock Engineering, 2005, 38 (4): 251-273.
- [3] Hudson J A, Brown E T, Rummel F. The controlled failure of rock discs and rings loaded in diametral compression [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1972, 10 (3): 247-249.
- [4] Zhang Q, Duan K, Xiang W, et al. Direct tensile test on brittle rocks with the newly developed centering apparatus[J]. Geotechnical Testing Journal, 2017, 41 (1): 92-102.
- [5] 张少华, 缪协兴, 赵海云. 试验方法对岩石抗拉强度测定的影响[J]. 中国矿业大学学报, 1999, 28(3): 243-246. (Zhang Shaohua, Miao Xiexing, Zhao Haiyun. Influence of test methods on measurement of rock tensile strength[J]. Journal of China University of Mining and Technology, 1999, 28(3): 243-246. (in Chinese))
- [6] 叶明亮, 续建科, 牟宏, 等. 岩石抗拉强度试验方法的探讨[J]. 贵州工业大学学报(自然科学版), 2001, 30(6): 19-25. (Ye Mingliang, Xu Jianke, Mu Hong, et al. Discussion on test method of rock tensile strength [J]. Journal of Guizhou University of Technology(Natural Science Edition), 2001, 30(6): 19-25. (in Chinese))
- [7] 陶纪南. 岩石轴向拉伸与劈裂法试验结果的分析[J]. 金属矿山, 1999 (3): 28-31. (Tao Jinan. Comparison and analysis of test results of rock axial tension and splitting methods [J]. Metal Mine, 1999 (3): 28-31. (in Chinese))
- [8] 蔡美峰. 岩石力学与工程[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (Cai Meifeng. Rock mechanics and engineering [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))
- [9] Burshtein L S. Rock strengths under axial tension and flexure[J]. Soviet Mining, 1967, 3(4): 363-368.
- [10] Hawkes I, Mellor M, Garipey S. Deformation of rocks under uniaxial tension[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts, 1973, 10(6): 493-507.
- [11] Stimpson B, Chen R. Measurement of rock elastic moduli in tension and in compression and its practical significance[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, 30(2): 338-347.
- [12] Yu X, Gama C D D, Na Y, et al. Deformation behaviour of rocks under compression and direct tension [J]. Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy, 2005, 105(1): 55-62.
- [13] Амбарцумян С А. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986. (Амбарцумян С А. Different modulus elasticity theory [M]. Translated by Wu Ruifeng, Zhang Yunzhen. Beijing: China Railway Press, 1986. (in Chinese))
- [14] 姚文娟, 叶志明. 不同模量横力弯曲梁的解析解[J]. 应用数学和力学, 2004, 25 (10): 1014-1022. (Yao Wenjuan, Ye Zhiming. Analytical solution of transverse bending beam with different modulus [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25 (10): 1014-1022. (in Chinese))
- [15] 姚文娟, 叶志明. 不同模量悬臂梁的解析解及有限元数值解[J]. 机械强度, 2005, 27 (2): 262-267. (Yao Wenjuan, Ye Zhiming. Analytical solution and finite element numerical solution of cantilever beam with different modulus[J]. Compressive Strength, 2005, 27 (2): 262-267. (in Chinese))
- [16] 陈津民. 弯曲法测岩石抗拉强度[J]. 工程地质学报, 2008, 16 (增 1): 317-319. (Chen Jinmin. Bending method for measuring rock tensile strength[J]. Journal of Engineering Geology, 2008, 16 (Supp.1): 317-319. (in Chinese))
- [17] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论[M]. 北京大学出版社, 1992. (Wang Ren, Huang Wenbin, Huang Zhuping. Introduction to plastic mechanics [M]. Beijing: Peking University Press, 1992. (in Chinese))
- [18] Wang Y, Hu X, Liang L, et al. Determination of tensile strength and fracture toughness of concrete using notched 3-p-b specimens[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2016, 160: 67-77.
- [19] Y S, Hu X Z, Li L. Determination of tensile strength and fracture toughness of granite using notched three-point-bend samples [J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2016, 50(1): 1-12.