

基于滑移线场理论斜坡条基极限承载力解析解*

蒋洋^{1,2}, 王晓谋², 郭建坤¹, 董云¹

(1.淮阴工学院 建筑工程学院,江苏 淮安,223001;2.长安大学 公路学院,西安,71006)

摘 要:在工程建设领域,经常需要把基础设置在斜坡地基上,但在现行成果中,对斜坡地基极限承载力的确定并没有给出具体计算方法。为合理确定斜坡地基极限承载力,从而为斜坡地基上的基础设计提供理论依据,并有效降低基础工程的建设成本,本文基于滑移线场理论,建立了斜坡地基的滑移破坏模型,进而根据斜坡地基坡前、坡后土体的塑性边界条件,推导了无重土斜坡地基极限承载力解析公式。同时,提出了采用有限差分方法获取斜坡地基滑移线场及应力分布场的方法。实例计算表明,滑移线解小于极限平衡解及有限元解,主要误差来自于地基土自重的影响,但总体误差在10%以下,本文所述解析法可用于斜坡地基极限承载力的快速估算。

关键词: 斜坡地基;地基极限承载力;滑移线法;条形基础

中图分类号: TU470.1 文献标识码: A 文章编号: 1673-0836(2018)01-0092-09

Analytical Solutions of Ultimate Bearing Capacity for Strip Foundations on Slopes Based on Slip Line Theories

Jiang Yang^{1,2}, Wang Xiaomou², Guo Jiankun¹, Dong Yun¹

(1. Faculty of Architecture and Civil Engineering, Huaiyin Institute of Technology, Huai'an, Jiangsu 223001, P.R. China;
2. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R. China)

Abstract: In the field of engineering construction, foundations are always placed on slopes. However, in the present research work, there is no accurate method to calculate the ultimate bearing capacity of these foundations. In order to accurately calculate the ultimate bearing capacity of foundations on slopes, provide theoretical basis for foundation designing, and effectively reduce the construction cost of these foundations, slip failure model for foundations on slopes is developed based on slip line theories and the analytical formula to calculate the ultimate bearing capacity of these foundations without considering the weight of soil is deduced according to the plastic boundary conditions of soil before and after the slope. Meanwhile, the way how to get the slip line field and stress field in the whole foundation soil by finite difference method is introduced. To verify the feasibility and reliability of the methods described herein, a calculation example is given in this paper. Calculation results from the example indicate that, slip line solution is smaller than the limit equilibrium solution and the finite element solution, the main error is from the soil weight impact, but overall error less than 10%. Therefore, the analytical method herein can be used to quickly estimate the ultimate bearing capacity of foundations on slopes.

Keywords: foundations on slopes; ultimate bearing capacity; slip line method; strip foundations

* 收稿日期:2017-05-06(修改稿)

作者简介:蒋洋(1976-),男,江苏淮安人,博士,副教授,主要从事岩土工程教学及科研工作。

E-mail: jy_12345678@163.com

基金项目:高等学校博士学科点专项科研基金(20110205110013);淮安市应用研究与科技攻关计划(工业)项目(HAG2015026);江苏省住房与城乡建设厅指导项目(2015ZD50)

0 引言

在公路、铁路、建筑、电力、水利等工程建设领域,经常需要把基础设置在具有一定斜坡的地基上。设计者要么将其简单近似为平地地基情况进行处理,或者凭经验对地基的承载力予以折减。显然,这些方法都缺乏科学的依据,其结果可能过于保守,也可能安全储备不足。如果能准确地计算斜坡地基极限承载力,合理分析斜坡地基的稳定性,就能有效解决这一问题。

滑移线法依据极限平衡法建立土体微分极限平衡方程,再根据边界条件对方程求解,获得极限平衡区的滑移线场和应力分布,计算得到基础范围内的边界应力即为极限承载力^[1]。从 1969 年起,Booker (1969)^[2], Hansen (1970)^[3], Kumar (2003)^[4], Martin(2005)^[5]先后采用滑移线法计算了 Terzaghi 极限承载力公式中的承载力系数 N_γ ;Davis 等(1973)^[6]应用特征线法分析了条形基础作用下的非均质黏土地基的极限承载力;Nakase (1981)^[7]针对黏聚力沿深度线性增大的非均质地基上的矩形基础,根据圆弧滑动面上限解与滑移线场解提出了地基承载力的近似计算公式。我国学者在应用特征线法计算地基极限荷载方面也做了大量的工作,主要有张国祥等(1997)^[8]、肖大平(1995,1998)^[9-10]、韩冬冬等(2007)^[11-13]、李丽民等(2013)^[14]。

目前,滑移线理论已被广泛应用于地基极限承载力的计算中。但对于对有重土的滑移线精确解,目前的研究还不能严格证明其是否为完全解,而对无重土理想情况的滑移线精确解,已被证明即是完全解^[10]。若将滑移线理论应用于斜坡地基极限承载力的求解中,获得无重土斜坡地基的解析解,将为快速确定斜坡地基的极限承载力提供有效途径。

1 土的极限平衡条件及微分方程

根据滑移线理论,当单元土体处于极限平衡状态时,土体中一点处有两条滑移线通过,即 α 族滑移线和 β 族滑移线,这两条滑移线与主应力 σ_1 的作用方向线之间的夹角为 $\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。若主应力

σ_1 的作用线与水平线之间的夹角为 η ,则 α 族滑移线的切线与水平线的夹角为 $\eta - \theta_1$, β 族滑移线的切线与水平线的夹角为 $\eta + \theta_1$,如图 1(a)所示。

如若从土体一点处在 x, y 坐标平面内取出一个微分单元,且该微分单元处于极限平衡状态,则可绘出如图 1(b)所示的摩尔应力圆,进一步可推导出下式:

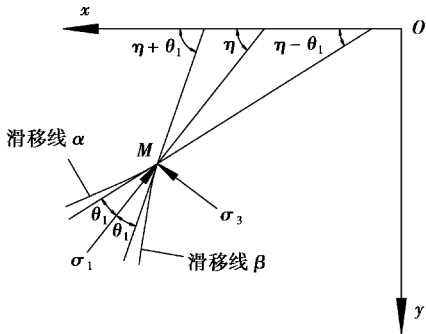
$$\sigma_y = \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\eta) - c \cdot \cot \varphi \quad (1)$$

$$\sigma_x = \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\eta) - c \cdot \cot \varphi \quad (2)$$

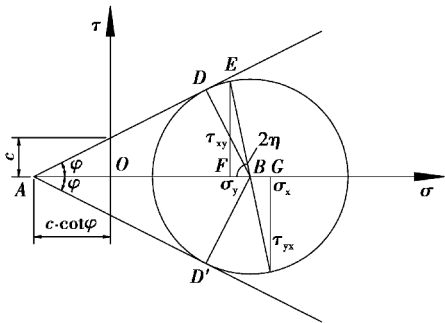
$$\tau_{xy} = \sigma \sin \varphi \sin 2\eta \quad (3)$$

式中: η 为大主应力 σ_1 的作用线与 x 坐标轴的夹角。

$$\sigma \text{ 为特征应力, } \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot \varphi$$



(a) 滑移线



(b) 摩尔应力圆

图 1 土体中一点处的应力关系

Fig.1 Stress at a point in soil

若将坐标系旋转一个角度 α ,坐标轴 x, y 变为 n, t (如图 2 所示),则在 n, t 坐标系中,土体的极限平衡条件表示为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\varepsilon) - c \cdot \cot \varphi \\ \sigma_t &= \sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\varepsilon) - c \cdot \cot \varphi \\ \tau_{nt} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $\varepsilon = \eta - \alpha$

若已知土体中各点的 σ 和 η 值,则可根据式

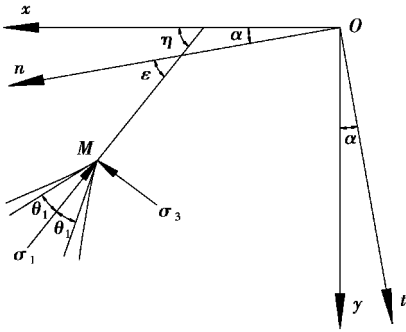


图 2 坐标轴转换示意图

Fig.2 Schematic for axis conversion

(1)、式(2)、式(3)或式(4)计算出处于极限平衡状态下的土体中各点处的应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 或 σ_n 、 σ_t 、 τ_{nt} 值。

考虑式(1)~(3),并结合土的静力平衡微分方程,可得到土的极限平衡微分方程。通过特征线法求解该方程,可得出两族不同的特征线方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(\eta - \theta_1) \\ d\sigma - 2\sigma \tan \varphi d\eta &= \\ \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\alpha - \varphi) dx + \cos(\alpha - \varphi) dy] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan(\eta + \theta_1) \\ d\sigma + 2\sigma \tan \varphi d\eta &= \\ \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\alpha + \varphi) dx + \cos(\alpha + \varphi) dy] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这两族特征线与正 x 坐标轴的夹角分别为 $(\eta \mp \theta_1)$, 两族特征线之间的夹角为 $2\theta_1$, 特征线即为滑移线。

若令式(5)、式(6)中的 $\gamma=0$, 可得到无重土滑移线应力方程, 如式(7)所示:

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha \text{ 线} \quad \frac{d\sigma}{dx} &= 2\sigma \tan \varphi \frac{d\eta}{dx} \\ \text{沿 } \beta \text{ 线} \quad \frac{d\sigma}{dx} &= -2\sigma \tan \varphi \frac{d\eta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

沿式(7)所示的两族滑移线积分后可得:

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } \alpha \text{ 线} \quad \sigma &= C_\alpha e^{2\eta \tan \varphi} \\ \text{沿 } \beta \text{ 线} \quad \sigma &= C_\beta e^{-2\eta \tan \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: C_α 、 C_β 为积分常数, 由具体问题的边界条件确定。

2 斜坡地基极限承载力

在地基达到极限承载力时, 坡后土体强度并未

充分发挥, 该特征可用系数 m (发挥系数) 来表征。此时, 坡后土体的强度参数可表示为 c_m (黏聚力), φ_m (内摩擦角), τ_m (抗剪强度)。坡后土体同样遵循库仑屈服准则:

$$\tau_m = m(c + \sigma \tan \varphi) = c_m + \sigma \tan \varphi_m, \text{ 即 } c_m = mc; \\ \tan \varphi_m = m \tan \varphi$$

设条形基础位于斜坡上, 坡前、坡后的边坡角分别为 β 、 β' , 如图 3 所示。先按基底粗糙条件求解斜坡地基的极限承载力, 当基底粗糙时: $\psi_1 = \varphi_m$, $\psi_2 = \varphi$ 。

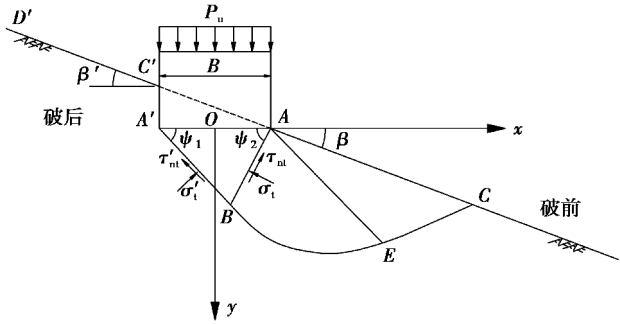


图 3 斜坡地基破坏机理

Fig.3 Failure mechanism of foundations on slopes

2.1 坡前土体

坡前土体边界一: AB 线上的塑性边界条件可参照图 4, 即 α 族滑移线的切线与 x 轴正方向的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, β 族滑移线的切线与 x 轴正方向的夹角为 $\pi - \varphi$; 取 AB 线方向为 n 轴方向, 则 $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, $\eta = \frac{3}{4}\pi - \frac{\varphi}{2}$ 。将 $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 代入式(4)得,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \sigma \cos^2 \varphi - c \cdot \cot \varphi \\ \tau_{nt} &= \sigma \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: σ_t 、 τ_{nt} 分别为 AB 滑动面上的正应力和剪应力值。

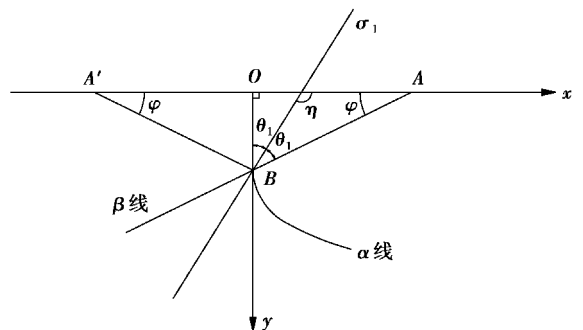


图 4 AB 线上的塑性边界条件

Fig.4 Plastic boundary conditions of soil on side AB

将边界条件 $\eta = \frac{3}{4}\pi - \frac{\varphi}{2}$ 代入式(8)第一式得,

$$\sigma = C_\alpha e^{2(\frac{3}{4}\pi - \frac{\varphi}{2})\tan\varphi} \quad (10)$$

坡前土体边界二:取 AC 方向为 n 轴方向, AC 边界面为自由面,故应力边界条件为 $\sigma_t = 0, \tau_{nt} = 0$ 。 AC 边界为最小主应力面,故 $\eta = \beta$ (β 角为斜坡坡度), $\varepsilon = 0$ 。

将边界条件 $\varepsilon = 0, \sigma_t = 0, \tau_{nt} = 0$ 代入式(4)可得:

$$\sigma = \frac{c \cdot \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (11)$$

再将边界条件 $\eta = \beta$ 代入滑移线应力方程式(8)第一式得:

$$\sigma = C_\alpha e^{2\beta \tan \varphi} \quad (12)$$

联立式(11)和式(12),可得 α 族滑线的积分常数:

$$C_\alpha = \frac{c \cdot \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \cdot e^{-2\beta \tan \varphi} \quad (13)$$

根据“沿一条滑移线上的积分常数相同”的滑移线性质, α 族滑线的积分常数在 AB 边界和 AC 边界处相同。故将式(13)、式(10)代入式(9),可得到 AB 边界上的应力分量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{c \cdot \cot \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta)\tan \varphi} - c \cdot \cot \varphi \\ \tau_{nt} &= \frac{c \cdot \cos^2 \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta)\tan \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: σ_t, τ_{nt} 分别为 AB 滑动面上的正应力和剪应力值; β 为边坡坡度。

2.2 坡后土体

坡后土体边界一: $A'B$ 线上的塑性边界条件为: $\eta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_m}{2}, \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_m}{2}$ (取 $A'B$ 方向为 n 轴方向),代入式(4)得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_t &= \sigma \cos^2 \varphi_m - c_m \cdot \cot \varphi_m \\ \tau'_{nt} &= \sigma \sin \varphi_m \cos \varphi_m \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: σ'_t, τ'_{nt} 分别为 $A'B$ 滑动面上的正应力和剪应力值。

代入滑移线应力方程式(8)第二式得:

$$\sigma = C_\beta e^{-2(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_m}{2})\tan \varphi_m} \quad (16)$$

坡后土体边界二: $C'D'$ 上的塑性边界条件为: $\eta = \pi + \beta', \varepsilon = \pi$ (取 $C'D'$ 方向为 n 轴方向);又有应力边界条件 $\sigma_t = 0, \tau_{nt} = 0$ 。将边界条件 $\varepsilon = \pi, \sigma_t = 0, \tau_{nt} = 0$ 代入式(4)可得:

$$\sigma = \frac{c_m \cot \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \quad (17)$$

再将边界条件 $\eta = \pi + \beta'$ 代入滑移线应力方程式(8)第二式得:

$$\sigma = C_\beta e^{-2(\pi + \beta')\tan \varphi_m} \quad (18)$$

联立式(17)和式(18),可得 β 族滑线的积分常数:

$$C_\beta = \frac{c_m \cot \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \cdot e^{2(\pi + \beta')\tan \varphi_m} \quad (19)$$

将式(19)、式(16)代入式(15),可得到 $A'B$ 边界上的应力分量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_t &= \frac{c_m \cdot \cot \varphi_m \cos^2 \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \cdot e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta')\tan \varphi_m} - c_m \cdot \cot \varphi_m \\ \tau'_{nt} &= \frac{c_m \cdot \cos^2 \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \cdot e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta')\tan \varphi_m} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

2.3 考察弹性核 $AA'B$ 的受力

如图 5 所示,弹性核 $AA'B$ 需满足静力平衡条件。首先根据水平方向受力平衡及合力矩平衡条件,即 $\sum X = 0, \sum M = 0$,计算出坡后土体的强度发挥系数为 m 。再根据竖向受力平衡,即 $\sum Y = 0$ 的条件计算出临坡地基的极限承载力 P_u 。

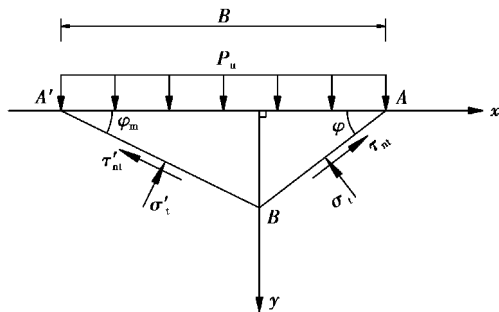


图 5 弹性区力系图

Fig.5 Forces system of the elastic wedge

设弹性核 $AA'B$ 在水平方向上的不平衡力为 ΔX ,对于 B 点的不平衡力矩为 ΔM ,则有:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \sigma'_t \cdot A'B \cdot \sin \varphi_m - \tau'_{nt} \cdot A'B \cdot \cos \varphi_m \\ &\quad - \sigma_t \cdot AB \cdot \sin \varphi + \tau_{nt} \cdot AB \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Delta M = \frac{1}{2} \sigma'_t \cdot A'B^2 - \frac{1}{2} \sigma'_t \cdot AB^2 - \quad \text{将式(14)、式(20)及 } A'B = \frac{B \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_m)},$$

$$P_u \cdot B \cdot (A'B \cdot \cos \varphi_m - \frac{B}{2}) \quad (22) \quad AB = \frac{B \cdot \sin \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \text{代入式(21)、式(22)得:}$$

$$\begin{aligned} \Delta X = & \frac{B \cdot \sin \varphi \sin \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \cdot \left[\frac{c_m \cdot \cot \varphi_m \cos^2 \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \cdot e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta') \tan \varphi_m} - c_m \cdot \cot \varphi_m \right] - \\ & \frac{B \cdot c_m \cdot \sin \varphi \cos^3 \varphi_m}{(1 - \sin \varphi_m) \cdot \sin(\varphi + \varphi_m)} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta') \tan \varphi_m} - \\ & \frac{B \cdot \sin \varphi \sin \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \cdot \left[\frac{c \cdot \cot \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta) \tan \varphi} - c \cdot \cot \varphi \right] + \\ & \frac{B \cdot c \cdot \sin \varphi_m \cos^3 \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cdot \sin(\varphi + \varphi_m)} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta) \tan \varphi} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta M = & \frac{1}{2} \left[\frac{B \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \right]^2 \left[\frac{c_m \cdot \cot \varphi_m \cos^2 \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \cdot e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta') \tan \varphi_m} - c_m \cdot \cot \varphi_m \right] - \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{B \cdot \sin \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \right]^2 \left[\frac{c \cdot \cot \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta) \tan \varphi} - c \cdot \cot \varphi \right] - \\ & P_u \cdot B^2 \cdot \left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m)} - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

由 $\sum Y = 0$ 可知:

$$\begin{aligned} P_u = & \frac{\sin \varphi \cos \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \left[\frac{c_m \cdot \cot \varphi_m \cos^2 \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \cdot e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta') \tan \varphi_m} - c_m \cdot \cot \varphi_m \right] + \\ & \frac{c_m \cdot \sin \varphi \sin \varphi_m \cos^2 \varphi_m}{\sin(\varphi + \varphi_m) \cdot (1 - \sin \varphi_m)} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi_m + 2\beta') \tan \varphi_m} + \\ & \frac{\sin \varphi_m \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_m)} \left[\frac{c \cdot \cot \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta) \tan \varphi} - c \cdot \cot \varphi \right] + \\ & \frac{c \cdot \sin \varphi_m \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_m) \cdot (1 - \sin \varphi)} e^{(\frac{3}{2}\pi - \varphi - 2\beta) \tan \varphi} \end{aligned} \quad (25)$$

式中: $c_m = m \cdot c$; $\varphi_m = \arctan(m \cdot \tan \varphi)$

为得到最优结果,基于“最小均方差条件”构造目标函数如下:

$$Q = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta M^2} \quad (26)$$

可以认为,当目标函数值 Q 最小时,即认为结果最合理。因此,临坡地基的极限承载力 P_u 的计算步骤为:先假设 m 值,代入式(25)计算 P_u ,再将 m 、 P_u 值代入式(23)、式(24)求 ΔX 及 ΔM 值,将求出的 ΔX 及 ΔM 值代入式(26),求出目标函数值 Q ,对应于最小 Q 值的极限承载力 P_u 即为所求。

当基底完全光滑时,滑移线网贯穿到基础底

面,两组滑移线与基础底面所成夹角分别为: $\psi_1 =$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_m}{2}, \psi_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}。$$

坡后边界 $A'O$ 上的边界条件为: $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\sigma_t =$

$$P_u, \tau_n = 0, \eta = \frac{\pi}{2}, \text{将该边界条件代入式(4)及式(8)}$$

第二式可得:

$$\frac{P_u + c_m \cdot \cot \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = C_\beta e^{\pi \tan \varphi_m} \quad (27)$$

另根据 $C'D'$ 边界条件,可得到斜坡地基坡后 β 族滑线的积分常数,如式(19)所示。

将式(19)代入式(27),可得斜坡地基坡后极限承载力:

$$P_u + c_m \cdot \cot \varphi_m \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_m}{2} \right) e^{(\pi+2\beta') \tan \varphi_m} - c_m \cdot \cot \varphi_m \tag{28}$$

坡前边界 AO 上的边界条件为: $\varepsilon = \frac{\pi}{2}, \sigma_t = P_u, \tau_{nt} = 0, \eta = \frac{\pi}{2}$, 将该边界条件代入式(4)及式(8)第一式可得:

$$\frac{P_u + c \cdot \cot \varphi}{1 + \sin \varphi} = C_\alpha e^{\pi \tan \varphi} \tag{29}$$

另根据 AC 边界条件,可得到斜坡地基坡后 α 族滑线的积分常数,如式(13)所示。

将式(13)代入式(29),即可得到临坡地基坡前极限承载力:

$$P_u + c \cdot \cot \varphi \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{(\pi+2\beta') \tan \varphi} - c \cdot \cot \varphi \tag{30}$$

$$\eta = \frac{-\sigma_1 + \sigma_2 + 2(\sigma_1 \eta_1 + \sigma_2 \eta_2) \tan \varphi + \gamma[y_1 - y_2 + (2x - x_1 - x_2) \tan \varphi]}{2(\sigma_1 + \sigma_2) \tan \varphi} \tag{33}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + 2\sigma_1(\eta - \eta_1) \tan \varphi + \gamma[(y - y_1) - (x - x_1) \tan \varphi] \\ \text{或 } \sigma &= \sigma_2 - 2\sigma_2(\eta - \eta_2) \tan \varphi + \gamma[(y - y_2) + (x - x_2) \tan \varphi] \end{aligned} \right\} \tag{34}$$

按上述差分方程式(31)~式(34)计算 x, y, η, σ 值时,首先是从已知的边界面开始,逐步计算到某一未知面为止。

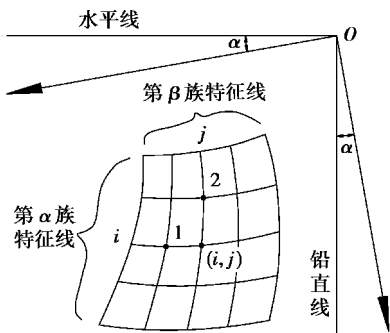


图 6 特征线网示意图

Fig.6 Schematic for characteristic line mesh

4 斜坡地基的滑移线场

对于如图 3 所示的斜坡地基,在进行斜坡地基的滑移线场计算时,将地基土分成 3 个区域来计算,即主动区 AA'B,过渡区 ABE 及被动区 AEC。

因此,基底完全光滑时,斜坡地基的极限承载力可按式(30)进行计算。令式(28)与式(30)相等,即可求出坡后土体强度发挥系数 m 。

笔者运用 Fortran 语言编制了相应的计算程序,通过试算法来求解斜坡地基的极限承载力 P_u 。

3 滑移线的有限差分表达式

要得到特征线的解析解较为困难,可采用差分方法来求得特征线的近似解。若有如图 6 所示的两族特征线,可求得滑移线的任意结点 (i, j) 处 x, y, η, σ 的表达式为:

$$x = \frac{x_1 \tan(\eta_1 - \theta_1) - x_2 \tan(\eta_2 + \theta_1) - (y_1 - y_2)}{\tan(\eta_1 - \theta_1) - \tan(\eta_2 + \theta_1)} \tag{31}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= y_1 + (x - x_1) \tan(\eta_1 - \theta_1) \\ \text{或 } y &= y_2 + (x - x_2) \tan(\eta_2 + \theta_1) \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

当其接触条件为粗糙时,基础底面下存在着与基础一起运动的三角形弹性楔体 A'AB。首先应求出 AB 及 A'B 边界上的 (x, y, η, σ) 值,再从 A'B 及 AB 边界开始逐步向地基深处推进,绘制整个滑移线网。当基础底面与地基表面接触条件为完全光滑时,AA'面上的最大主应力方向为竖直方向,此时应从 AA'边界逐步向地基深处推进,绘制整个滑移线网。

现以基底完全光滑为例,说明临坡地基滑移线场的绘制方法。

4.1 主动区 AA'B

主动区边界 A'A 的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ \eta &= \frac{\pi}{2} \\ \sigma &= \frac{P_u + c \cdot \cot \varphi}{1 + \sin \varphi} (x \geq 0 \text{ 时}); \\ \text{或 } \sigma &= \frac{P_u + c_m \cdot \cot \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} (x < 0 \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \tag{35}$$

首先在已知边界 $A'A$ 上根据计算精度的要求设置若干个等间距的计算点,各计算点的 (x,y,η,σ) 值均为已知。再根据边界 $A'A$ 上相应的已知点逐步推进,即按照第一类边界值问题,按式(31)~式(34)进行计算。

4.2 过渡区 ABE

AB 边界为过渡区 ABE 的一条已知边界。过渡区的另一条已知边界为 A 点,该点处的顶角值 $\Delta\eta$ 可按式(36)计算。过渡区的 A 点可视为长度等于零的一条 α 族滑移线,可以根据需要将该顶角 $\angle BAE$ 划分为几个等分角,相应于 A 点滑动线上各等分点的 η_i 值可按式(37)计算,各等分点处的 σ 值可按式(38)计算^[15]。而各等分点处的 x,y 坐标均为顶点 A 的 x,y 坐标值,因此顶角各等分点处的 (x,y,η,σ) 均可求出。

$$\Delta\eta = \eta_p - \eta_a \tag{36}$$

式中: $\Delta\eta$ 为过渡区某结点处顶角值; η_p 为被动区中某结点处的大主应力与 x 坐标轴正方向的夹角; η_a 为主动区中某结点处的大主应力与 x 坐标轴正方向的夹角。

$$\eta_i = \eta_a + K \frac{\Delta\eta}{n} \tag{37}$$

式中: η_i 为过渡区某结点处的顶角第 i 等分点的 η 值; n 为过渡区某结点处的顶角划分的等分数; K 为特征线的序号数,其值在 $0 \sim n$ 之间,即 $K=0$ 时 $\eta_0 = \eta_a$, $K=n$ 时 $\eta_n = \eta_p$ 。

$$\sigma_i = \sigma_a e^{(2\eta_i - \pi) \tan \varphi} \tag{38}$$

式中: σ_i 为过渡区某结点处的顶角第 i 等分点的特征应力 σ 值; σ_a 为过渡区某结点所在主动区边界线上的特征应力 σ 值。

AB 边界和 A 点边界求出后,即可按第二类边界值问题的方法计算过渡区 ABE 中各计算点处的 (x,y,η,σ) 值。

4.3 被动区 AEC

通过过渡区 ABE 的计算,已经求出了边界 AE 上各点的 (x,y,η,σ) 值,边界 AE 即为被动区 AEC 的第一条已知边界。另一条已知边界为 AC 线,该边界上的条件如式(39)所示。因此,被动区 AEC 满足第三类边界值问题,被动区 AEC 内各点的 (x,y,η,σ) 值应按照从左向右,从上到下的顺序依次

计算。

$$\left. \begin{aligned} y &= \tan\beta(x - x_A) \\ \eta &= \beta \\ \sigma &= \frac{c \cdot \cot \varphi}{1 - \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

式中: x_A 为 A 点的横坐标 x 值; β 为斜坡坡前边坡角。

5 实例验证

设存在某一斜坡地基,斜坡表面作用一条形基础,基底光滑,基础宽度 $B = 1.8 \text{ m}$ 。地基土重度 $\gamma = 17 \text{ kN/m}^3$,内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$,黏聚力 $c = 40 \text{ kPa}$,坡前及坡后坡度 $\beta = \beta' = 45^\circ$ 。试绘制该地基在极限承载力作用下的滑移线场。

若不计入土体重度对承载力的影响,将上述已知参数代入程序计算,得到如下结果:

坡后土体强度折减系数 $m = 0.537$,地基极限承载力 $P_u = 558.91 \text{ kPa}$ 。由坡前土体内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$,黏聚力 $c = 40 \text{ kPa}$ 得:坡后土体内摩擦角 $\varphi_m = 17.225^\circ$,黏聚力 $c_m = 21.48 \text{ kPa}$ 。

根据前述边界条件,求解该斜坡地基中各结点的 (x,y,η,σ) 值。 α 族滑移线 6 条, β 族滑移线 17 条。将各结点的 (x,y) 坐标连接起来,即构成该地基的滑移线网(如图 7 所示),各结点处的特征应力也为已知。

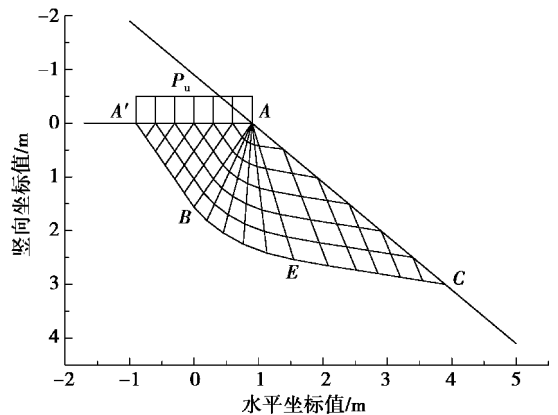


图 7 斜坡地基滑移线场

Fig.7 Slip line field of a foundation on slope

为验证本例计算结果的准确性,采用极限平衡法及有限元方法进行平行计算。其中极限平衡法基于 Meyerhof 课题,采用单侧滑移破坏模型,引入

“等代自由面”概念,将基底以上的覆土总重视为等效超载,计算出三个承载力系数 N_r 、 N_q 、 N_c ,代入式(40)即可得到地基极限承载力^[16-17],如表 1。

$$q_u = \frac{1}{2}\gamma BN_r + \gamma D_{f0}N_q + cN_c \tag{40}$$

式中: N_r 、 N_q 、 N_c 为极限平衡法承载力系数; γ 为地基材料的容重, kN/m^3 ; B 为条形基础宽度, m ; D_{f0} 为基础净埋深, m 。

另外,按平面应变问题建立二维模型进行有限元计算。为满足计算精度要求,模型的左右边界到基础的距离以及底部边界到基础底面的距离均达到基础宽度的 10 倍。模型侧部采用法向约束,底

部采用水平及竖直双向约束,顶部为自由面。视地基土为理想弹塑性材料,服从 Mohr-Coulomb 屈服准则,条形基础按刚性的线弹性材料考虑。在界面处引入“界面单元”来反映基础与地基之间的接触条件。将几何模型划分为若干个 15 节点的三角形单元网格,沿基础底面线对网格进行局部加约束。

以有限元仿真计算来模拟载荷试验,根据计算结果绘制地基的 q - s 曲线,通过对 q - s 曲线的分析即可获取地基极限承载力。计算结果如表 1 及图 8。

表 1 计算结果比较

Table 1 Comparison of calculated results

滑移线解 q_{u1}/kPa	极限平衡解				误差/%	有限元解	误差/%
	N_r	N_c	N_q	q_{u2} / kPa	$(q_{u1}-q_{u2})/q_{u2}$	q_{u3} / kPa	$(q_{u1}-q_{u3})/q_{u3}$
558.91	9.26	11.68	3.56	608.88	-8.21	602.93	-7.30

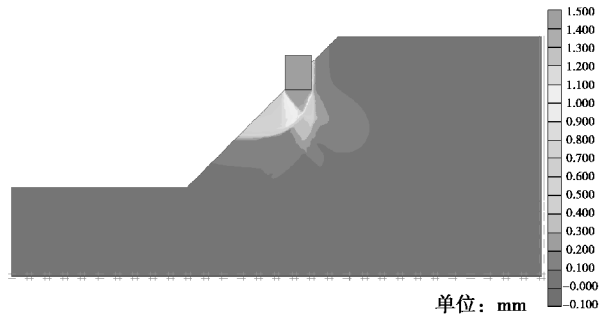


图 8 破坏时总位移增量云图

Fig.8 Nephogram of total incremental displacements in failure

可以看出,本例的滑移线解小于极限平衡解及有限元解,主要误差来自于地基土自重的影响,地基土自重对于斜坡地基极限承载力有一定的贡献,但总体误差在 10% 以下。本文所述滑移线法可用于斜坡地基极限承载力的快速估算。

6 结语

通过特征线法求解土的极限平衡条件,可得到

地基土中两族不同的滑移线方程和无重土滑移线应力方程。在地基达到极限强度时,首先在坡前一侧产生滑动面,而坡后土体对于地基极限承载力的贡献可以用一个抗剪强度发挥系数 m 来表征,即此时坡后土体的强度部分发挥。从而根据已知塑性边界条件,以及基础下的三角形弹性核应满足的静力平衡条件,可推导出无重土斜坡地基的极限承载力解析式,该公式可用于斜坡地基极限承载力的快速估算。根据有限差分原理,可求得滑移线的任意结点处 x, y, η, σ 的表达式。计算时从已知边界处开始,逐步向土体内部推进,当计算得到各结点的坐标值后,即可将各结点连接成滑移线网,并得到特征应力 σ 的分布场。

参考文献(References)

[1] 郑雨天.岩石力学的弹塑黏性理论[M].北京:煤炭工业出版社,1988.(Zheng Yutian. Viscous elastic plastic theory of rock mechanics [M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House,1988.(in Chinese))

- [2] Booker J R. Applications of theories of plasticity to cohesive frictional soils[D]. Sydney University, 1969.
- [3] Hansen J B. A revised and extended formula for bearing capacity [R]. Bulletin of the Danish Geotechnical Institute, 1970.
- [4] Kumar J. N_γ for rough strip footing using the method of characteristics [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(3): 669-674.
- [5] Martin C M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics [A]//Proceedings of the 11th International Conference of IACMAG [C]. Turin, 2005: 441-450.
- [6] Davis E H, Booker J R. The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays [J]. Geotechnique, 1973, 23(4): 551-563.
- [7] Nakase A. Bearing capacity of rectangular footings on clays of strength increasing linearly with depth [J]. Soils and Foundations, 1981, 21(4): 101-108.
- [8] 张国祥, 刘宝琛. 潜在滑移线理论及浅基承载力分析 [J]. 长沙铁道学院学报, 1997, 15(2): 95-99. (Zhang Guoxiang, Liu Baochen. Potential sliding curve theory and analysis of ground bearing capacity [J]. Journal of Changsha Railway University, 1997, 15(2): 95-99. (in Chinese))
- [9] 肖太平. 基于滑移线法精确数值解的极限承载力公式 [D]. 天津: 天津大学, 1995. (Xiao Daping. The formula of ultimate bearing capacity based on slip line exact numerical solution [D]. Tianjin: Tianjin University, 1995. (in Chinese))
- [10] 肖太平, 朱维一, 陈环. 滑移线法求解极限承载力问题的一些进展 [J]. 岩土工程学报, 1998, 20(4): 25-29. (Xiao Daping, Zhu Weiyi, Chen Huan. Progress in slip lines method to solve the bearing capacity problem [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(4): 25-29. (in Chinese))
- [11] 韩冬冬, 贾敏才, 刘开富, 等. 条形基础极限承载力数值分析 [J]. 岩土力学, 2007, 28(10): 2209-2214. (Han Dongdong, Jia Mincai, Liu Kaifu, et al. Numerical analysis of bearing capacity of a foundation under strip footing [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(10): 2209-2214. (in Chinese))
- [12] 韩冬冬. 条形浅基础极限承载力研究 [D]. 杭州: 浙江大学, 2007. (Han Dongdong. Study on bearing capacity of shallow strip footings [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007. (in Chinese))
- [13] 韩冬冬, 谢新宇, 王忠瑾, 等. 条形粗糙基础极限承载力求解与误差分析 [J]. 岩土工程学报, 2016, 38(10): 1789-1796. (Han Dongdong, Xie Xinyu, Wang Zhongjin. Solution and error evaluation for bearing capacity of rough strip footings [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(10): 1789-1796. (in Chinese))
- [14] 李丽民, 张国祥, 肖尚, 等. 基于潜在滑移线理论的地基承载力安全分析方法 [J]. 中国安全科学学报, 2013, 23(3): 39-44. (Li Limin, Zhang Guoxiang, Xiao Shang, et al. Method for bearing capacity safety analysis of foundation soil based on potential slip line theory [J]. China Safety Science Journal, 2013, 23(3): 39-44. (in Chinese))
- [15] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算 [M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2005. (Gu Weici. Pressure calculation for retaining wall [M]. Beijing: China Building Materials Press, 2005. (in Chinese))
- [16] 郑大同. 地基极限承载力的计算 [M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1979. (Zheng Datong. Calculation for the ultimate bearing capacity of foundations [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1979. (in Chinese))
- [17] 胡卫东, 曹文贵. 基于 Meyerhof 理论的临坡地基极限承载力简化分析方法 [J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2015, 42(1): 81-89. (Hu Weidong, Cao Wengui. A simplified analysis method for the ultimate bearing capacity of ground foundation near slope based on the theory of Meyerhof [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences Edition), 2015, 42(1): 81-89. (in Chinese))