

基于 Weibull 分布的非均质地层物性参数随机模型*

雷进生,武增琳,姚奇,李申,陈建飞

(三峡大学 土木与建筑学院,湖北 宜昌 443002)

摘 要:地质信息及其表征具有随机不确定性和模糊不确定性,而土体物理力学参数之间又存在着固有的互相关性。通过对地层的已知孔隙率参数进行统计分析,利用 Weibull 分布模拟孔隙率的空间分布非均质特性,并结合随机中点位移法,模拟非均质地层孔隙结构的空分布规律,建立了孔隙率的空间分布预测模型。研究建立了地质变量的空间函数关系,结合土性参数之间的相关性,以孔隙率为基本量形成二维地质剖面 and 三维数字地层,构造面向目标的非均质地层地质模型,探讨了非均质地层物性参数的时空分布特征及其有效描述,对地层局部地质信息的变异和随机性进行精细化描述和预测。

关键词:非均质地层;土性参数;孔隙率;地质模型;Weibull 分布

中图分类号:TU431 文献标识码:A 文章编号:1673-0836(2017)03-0684-08

Rand Model of Heterogeneous Formation Physical Parameters
Based on Weibull Distribution

Lei Jinsheng, Wu Zenglin, Yao Qi, Li Shen, Chen Jianfei

(College of Civil Engineering & Architecture, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, P.R. China)

Abstract: Geological information and characterization are stochastic uncertainty and fuzzy uncertainty, but there is inherent mutual correlation between the physical and mechanical parameters of soil. Based on statistical analysis of the known porosity parameters of stratum, Weibull distribution was adopted to simulate the spatial heterogeneity of porosity, combined with the random midpoint displacement method, then the spatial distribution law of pore structure of non-homogeneous formation was simulated, and the spatial distribution prediction model of porosity was established. The space variate function relation of geological variety was researched and established, and then a 2D geological section and a 3D digital stratum were formed in porosity of the basic amount combined with the correlation between the parameters of soils. The time and space distribution characteristics of heterogeneous stratum physical parameters and its effective description were discussed based on structuring goal-oriented non-homogeneous formation geological model, and the variability and randomness of regional geological information of the stratum were finely described and predicted.

Keywords: heterogeneous stratum; parameters of soil; porosity; geological model; Weibull distribution

0 引言

岩土体的物质组成、组织结构、干湿疏密状态

和变化具有随机性^[1],其性质也随空间和时间表现出很大的变异性^[2-3],这导致了地层的复杂性和非均质性^[4]。流体在地层中的扩散,如注浆加固

* 收稿日期:2016-09-14(修改稿)
作者简介:雷进生(1970-),男,河北石家庄人,博士,教授,主要从事基础工程加固方法与计算理论、结构安全监测与评估等方面的工作。E-mail:lei-jinsheng@163.com
基金项目:国家自然科学基金(51279092,51278282);湖北省自然科学基金(2013CFB218);宜昌市科学技术研究与开发项目(A2011-302-5);三峡大学人才科研启动基金(KJ2014B004)

与防渗工程引起的浆液扩散等,都必须考虑地层的非均质性,浆液扩散范围与土体物性参数分布特性密切相关,导致浆液扩散范围具有不确定性。

土性参数的许多指标之间都具有相关关系^[5],研究这些指标间的相关特性,一方面可以了解由易得指标(如孔隙比、颗粒级配)推求不易得指标(如压缩系数、抗剪强度指标)的可行性;另一方面可以了解诸如抗剪强度 c 、 φ 等指标间的相关特性,以便在可靠性分析中将它们作为相关的随机变量进行分析计算。Moh 等^[6]研究了原位压缩系数和初始孔隙比之间的相关关系,张春会等^[7]得到了基于 Weibull 分布,考虑力学参数关联的非均质煤概率模型; Tang^[8]、Vanmarke^[9] 及 Elishakoff^[10]对土体参数的概率分布模型进行了研究;罗晓辉等^[11]等提出了应用土体强度关于 Weibull 分布^[12]的分析方法。进一步研究非均质地层土性参数的分布规律及它们之间的相关关系,建立非均质地层模型,有利于建立注浆材料、岩土体结构和注浆加固强度之间的关系,从注浆结石体分布的随机性和不确定性中探索真实的注浆加固效果,完善注浆复合土体的加固设计理论^[13]。

由于地层成因的复杂性、控制和影响的多因素性、形成和发育的随机性、分布的高度非均质性等,利用有限的勘察数据成果进行非均质地层土体物性参数的随机性描述和预测,需要发展地层探测技术和解释方法,以及随机概率方法、随机分形技术和数值模拟方法。非均质体细观结构的描述与建模可采用数字图形技术^[14-15]、随机模拟技术^[16-18]等。

本文基于统计学原理,根据三峡库区某工程场地碎石土地层的勘查数据资料,采用 Weibull 分布将孔隙率作为基本量进行统计分析,获得相应统计参数,采用 Monte-Carlo 模拟技术得到与真实地层具有相同统计规律的土性参数数据,最终生成土性参数的分布图,结合土性参数的相关性和随机中点位移法形成二维数字地质剖面 and 三维数字岩土地层。这对开展非均质地层性状数值模拟、加固前后地基承载力计算,以及深入研究地基不均匀沉降特性等具有重要的理论意义和应用价值。

1 土性参数的分布规律

1.1 Weibull 分布

含有二参数的 Weibull 分布的分布函数:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{k}\right)^c\right]$$
 (1)

密度函数:

$$f(x) = ck^{-c}x^{c-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{k}\right)^c\right]$$
 (2)

式中: c 为形状参数; k 为尺度参数。 c 、 k 根据原始数据经统计分析获得。

形状参数 c 对密度曲线的形状起决定作用。改变 c 的大小,Weibull 分布可以近似为正态分布和指数分布等。如图 1 所示,保持 k 不变:当 $0 < c < 1$ 时,Weibull 分布密度函数曲线是以 $f(x)$ 轴和 x 轴为渐近线的曲线;当 $c = 1$ 时,Weibull 分布与指数分布密度函数形状最接近;当 $c > 1$ 时,Weibull 分布密度函数曲线有一个峰值,随 c 的增大峰值越高,其中 $c = 3$ 时,最接近于正态分布。尺度参数 k 对密度函数曲线有缩小或放大作用,对形状没有影响。如图 2 所示,当 $c = 2$ 时,随着 k 值的增大,Weibull 分布密度函数的峰值逐渐降低,曲线趋于扁平。

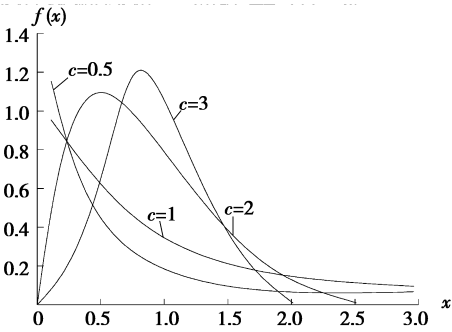


图 1 形状参数对密度函数的影响

Fig.1 Density function influenced by shape parameters

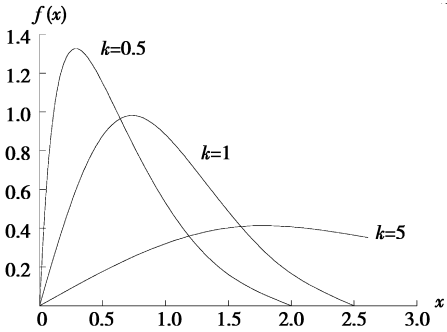


图 2 尺度参数对密度函数的影响

Fig.2 Density function influenced by dimension parameters

1.2 非均质地层孔隙率的 Weibull 分布验证

孔隙是土体变形的内因和决定土体物理力学性质的主要因素,对多孔介质内流体的传输性能有重要影响。三峡库区某工程加固场地数值模拟区域内的勘探点坐标和各勘探点孔隙率如表 1 和表

2 所示。

表 1 模拟计算场地各勘探点的孔隙率

Table 1 Porosity of exploration point of calculative field

孔点编号	指标	取值									
A1	取土深度/m	0	-1.2	-1.53	-3.19	-3.81	-4.8	-5.35	-5.71	-6.24	-6.53
	孔隙率	0.45	0.26	0.28	0.26	0.45	0.38	0.49	0.47	0.39	0.26
A2	取土深度/m	0	-0.55	-1.57	-1.75	-3.18	-3.61	-4.25	-5.28	-6.3	-6.35
	孔隙率	0.44	0.41	0.39	0.28	0.25	0.27	0.35	0.39	0.48	0.34
A3	取土深度/m	0	-0.4	-1.21	-2.66	-3.3	-3.61	-3.92	-4.09	-4.3	-5.28
	孔隙率	0.46	0.48	0.31	0.4	0.43	0.3	0.35	0.43	0.27	0.45
B1	取土深度/m	0	-1.11	-1.56	-1.98	-2.89	-3.21	-3.84	-4.91	-5.98	-6.63
	孔隙率	0.5	0.49	0.38	0.25	0.35	0.35	0.37	0.29	0.45	0.39
B2	取土深度/m	0	-0.96	-1.58	-2.68	-3.11	-3.26	-4.88	-5.19	-5.78	-6.58
	孔隙率	0.4	0.36	0.44	0.33	0.42	0.25	0.29	0.34	0.35	0.32
B3	取土深度/m	0	-0.46	-2.29	-2.29	-2.93	-3.06	-3.72	-3.84	-4.36	-5.66
	孔隙率	0.46	0.26	0.39	0.36	0.25	0.33	0.44	0.48	0.31	0.39

表 2 模拟计算场地勘探点的坐标

Table 2 Coordinates of exploration point of calculative field

孔点编号		A1	A2	A3	B1	B2	B3
孔点平面坐标/m	X	0.0	0.0	0.0	3.0	3.0	3.0
	Y	0.0	3.5	7.0	0.0	3.5	7.0

利用表 2 中的试验数据和概率纸法进行 Weibull 分布、正态分布和对数分布验证,并在 MATLAB 环境下将孔隙率试验数据绘于概率纸上,如图 3 所示。

由图 3 可见,孔隙率的绝大部分试验数据近似在一条直线上。对 3 种分布进行对比分析可以看出,Weibull 分布模拟效果较为理想。同时,Weibull 分布函数本身分布参数物理意义鲜明,如 c 近似为数据的均值, k 则描述了数据的不均匀程度,因此,运用 Weibull 分布具有较高的可行性。

1.3 孔隙率的 Weibull 分布参数估计

由于分布参数通常是未知的,必须根据已有数

据采用数理统计方法进行参数估计。在选择合适的孔隙率分布模型后,要估计孔隙率分布的参数,使分布函数最符合孔隙率的试验数据。孔隙率的概率密度函数范围直接受到其分布参数的影响,因此直接影响计算结果的准确性。通过统计分析,得到试验数据的 Weibull 分布参数 $c = 0.03\ 423$, $k = 0.40\ 01$ 。期望和方差由式(3)、式(4)计算得到,分别为 0.43 51 和 0.00 34。

$$E(x) = k\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

(3)

$$D(x) = k^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right]$$

(4)

2 基于 Weibull 分布的孔隙率模型

地层随机非均质性是土性参数的非均质性反映,这些随机变量包括颗粒级配、密度、含水率、凝聚力、内摩擦角、渗透系数、孔隙率、压缩模量等。

设 x 是任意实数,随机变量 X 为非均质地层的某一土性参数,函数

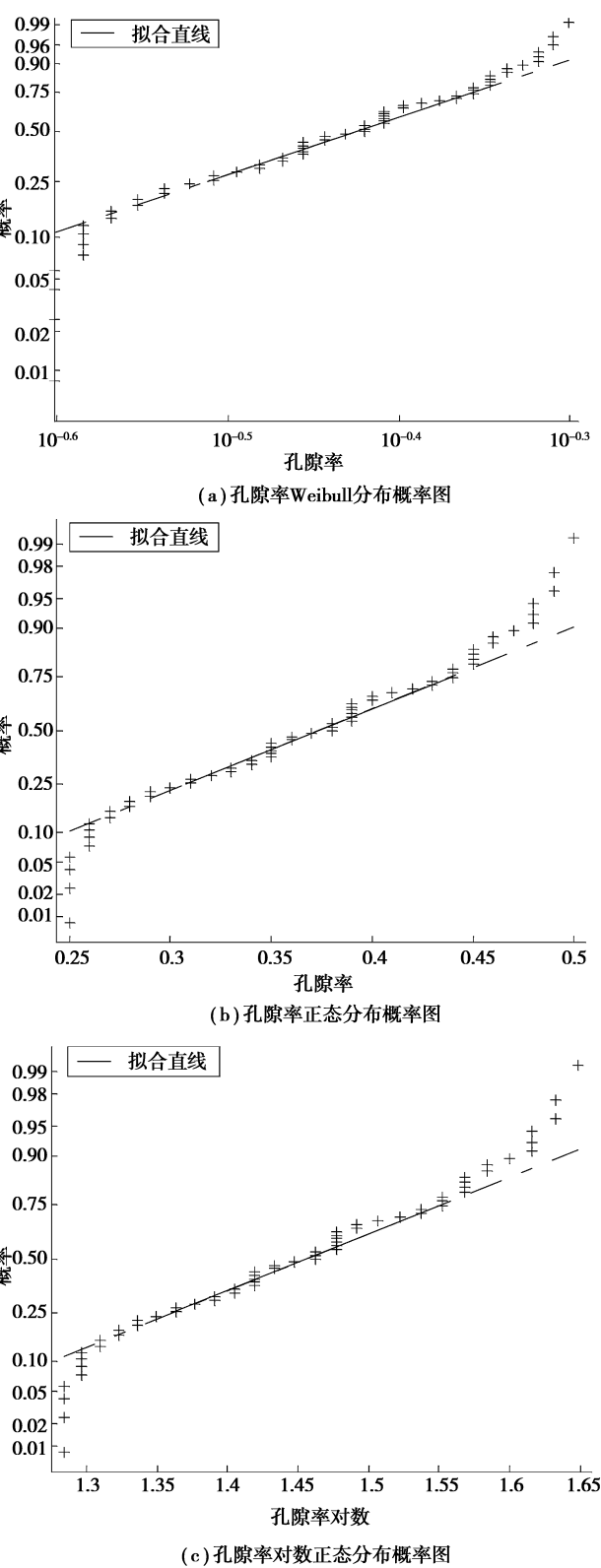


图3 孔隙率分布概率图

Fig. 3 Distribution probability of porosity

$F(x) = P\{X \leq x\}$ (5)

为非均质地层随机变量 X 的分布函数,简称 X 的分布函数。实质上 $F(x)$ 是指非均质地层某一土

性参数的分布函数。

对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1) \tag{6}$$

因此,如果知道了 X 的分布函数,则可以得到 X 落在区间 $[x_1, x_2]$ 上的概率,这样随机变量 X 的统计规律就可以由 X 的分布函数完整的描述。

假如将地层的随机变量 X 看作坐标轴上随机点的坐标,那么, $F(x)$ 作为 X 的分布函数在 x 处的函数值就表示为点 x 落在区间 $(-\infty, x]$ 上的概率。

假设存在一个分布函数 $F(x)$ 能够满足地层随机变量分布,那么对于任意实数 x , 存在非负函数 $P(x)$ 满足:

$$F(x) = P(x) dx \tag{7}$$

则称 X 为非均质地层的连续型随机变量,其中 $P(x)$ 是 X 的概率密度函数,简称 X 的概率密度。实质上, $P(x)$ 是指非均质地层某一土性参数的概率密度函数。

地层的非均质性也是地层的土性参数在一定几何区域内的空间变异性反映。土性参数具有强烈的空间变异性性和空间各向异性的特征,采用 Monte-Carlo 模拟法对地层土性参数进行单元体赋值,可从整体上定量分析并描述地层随机场的空间变异性。其具体思路是:首先基于勘察试验获得土性参数的有限数据,分析这些数据的特征,利用统计方法获得该参数的统计分布规律和分布参数,并建立相应的概率模型,然后,运用 Monte-Carlo 模拟技术得到与真实地层具有相同统计规律的土性参数数据,最终生成土性参数的分布图。

依据上述思路,基于表2实测数据对地层孔隙率进行数值模拟,模拟得到的结果如图4所示。

孔隙率与其他土性参数之间可以用函数关系或相关关系来表述,因此,可以利用概率方法建立以孔隙率为基准考虑土性参数相关性的非均质地层随机概率模型。利用试验数据和统计分析结果建立孔隙率随机分布模型的具体步骤如下:

- (1) 对研究区域内地层孔隙率的勘察试验数据进行统计分析,利用数理统计方法确定其统计分布规律。
- (2) 根据确定的统计分布规律和勘察数据,通过拟合方法确定分布参数。
- (3) 对研究区域划分大量单元,利用 Monte-Carlo 模拟法生成服从确定统计分布规律的随机数(即地层孔隙率),并将其赋予各个单元,即可完成

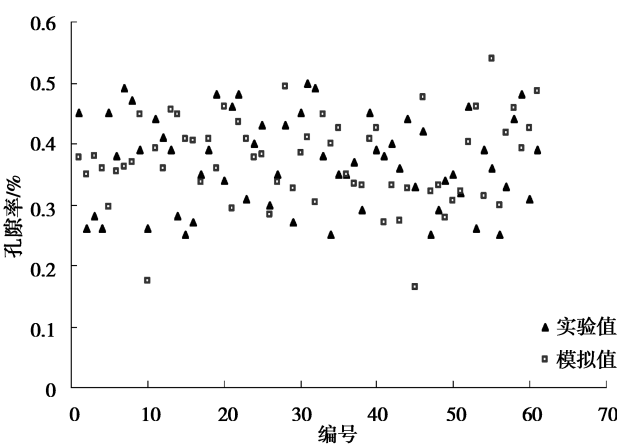


图 4 试验数据与模拟数据对比

Fig. 4 Contrast between testing and simulated data
对研究区域孔隙率的非均质模拟。
(4)根据土性参数值间的相关性,获得孔隙率与其他土性参数的相关函数,同样方法完成其他参数的非均质模拟。

3 非均质地层的构建

3.1 随机位移量的确定

结合分形插值算法,在上述研究的基础上进行插值运算。在随机分形差值算法中,为确保分形布朗运动中的自相似性,每次计算得到新的数据时都必须附加一个随机位移量。
在众多研究中该随机位移量符合均值为 0,方差为 Δn^2 的高斯分布。
由于分形对象具有自相似性,取任意 t_0 和 $r>0$,随机变量 $X(t_0+t)-X(t_0)$ 和 $[X(t_0+t)-X(t_0)]/r^H$ 在分形布朗运动中是具有自相似性的。因此,当 $t_0=0$ 且 $X(0)=0$ 时, $X(t)$ 和 $X(rt)/r^H$ 也具有自相似性,且两者服从有限相同维数的联合分布,它们在统计意义上是无差别的。

以上的自相似性在三维分形布朗运动中依然存在,但是此时的函数定义域是在二维平面上,高度坐标 z 是坐标 x 和 y 的函数,即 $z=Z(x,y)$ 。
为模拟地层的自相似性,在基平面的网络尺度以细化因子 r 不断减小时,随机位移量的方差也应该做相应的改变调整。在中点位移法中, n 次迭代后相应的随机位移量的方差与初始方差之间有如下关系:

$$\Delta_n^2 = r^{2nH} \sigma^2 \tag{8}$$

式中: σ_2 为迭代开始前随机变量的初始方差。
当基平面的细化因子 $r=\sqrt{2}/2$ 时,带入式(8)得到第 n 次迭代的随机位移量方差为:

$$\Delta_n^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2nH} \sigma^2 = 2^{-nH} \sigma^2 \tag{9}$$

在构造土性参数非均质地层数据模型时需要用到随机数发生器,用于生成随机变量样本。在大部分开发系统中都设有生成伪随机数发生器的函数,此类函数可以返回在特定区间 $[0,A]$ 上分布的伪随机数序列,并将这个随机数序列作为每次计算的随机数。朱庆^[19]基于格网局部稳态特征,给出并证明了随机位移量 Δ_i 的计算公式:

$$\Delta_i = d_i^H \times \delta \times \sqrt{1 - 2^{H-3} - 2^{2H-4}} \times \text{gauss}(\) \tag{10}$$

式中: H,δ 为原始数据的特征参数值; d_i 为细分后的线段间距; $\text{gauss}(\)$ 为服从 $N(0,1)$ 分布的随机函数。

3.2 二维非均质地层

根据上述研究思路,对研究区域内地层孔隙率进行模拟建模,分形维数取为 1.023。由分形维数 D 与赫斯特指数 H 之间的关系 $D=2-H$,得到赫斯特指数 $H=0.977$ 。由于研究区域的孔隙率符合 Weibull 分布,计算原始数据的方差 σ 为 0.003 4,根据随机位移量 Δ_i 的计算公式(10),将式中高斯函数修改为 Weibull 随机数,实现了地形的分形模拟,如图 5 所示。

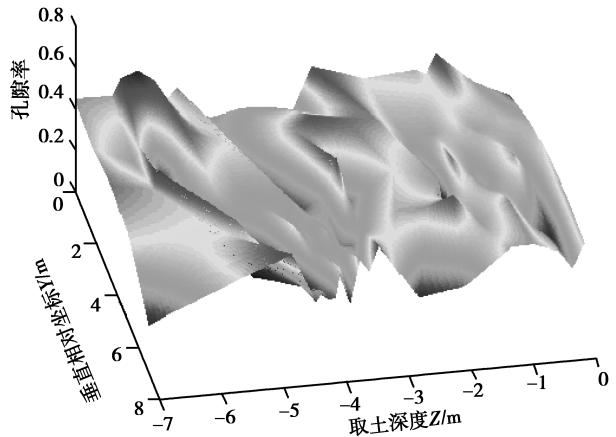


图 5 二维孔隙率分布图

Fig. 5 Two-dimensional porosity distribution graph

根据 Gauss 指数模型拟合弹性模量与孔隙率的关系 $E=ae^{-(\frac{n-b}{c})^2}$ (其中 a,b,c 均为常数,大小分别为 35.5、0.057 78 和 0.355 4),形成地层弹性模量随机分布剖面图,如图 6 所示。

渗透系数可由式(11)得到:

$$k_d = \frac{g}{v} C \varphi(n) d_e^2 \tag{11}$$

式中: g 为重力加速度, m/s^2 ; ν 为水的粘滞系数, m^2/s ; $\varphi(n)$ 为孔隙率系数; d_e 为有效粒径, mm ; C 为经验参数。形成的地层渗透系数分布图如图 7 所示。

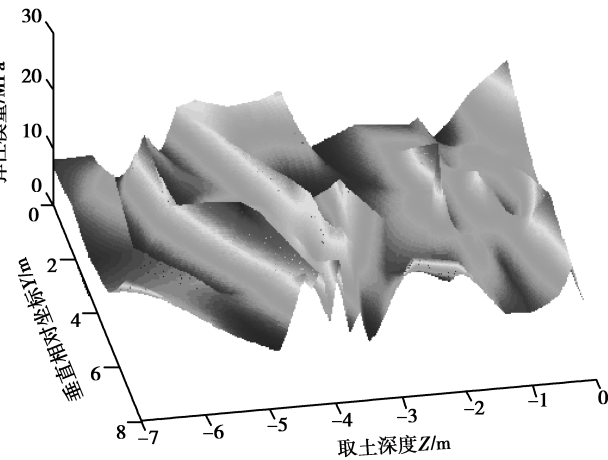


图 6 弹性模量随机分布剖面图

Fig. 6 Random distribution profile of elastic modulus

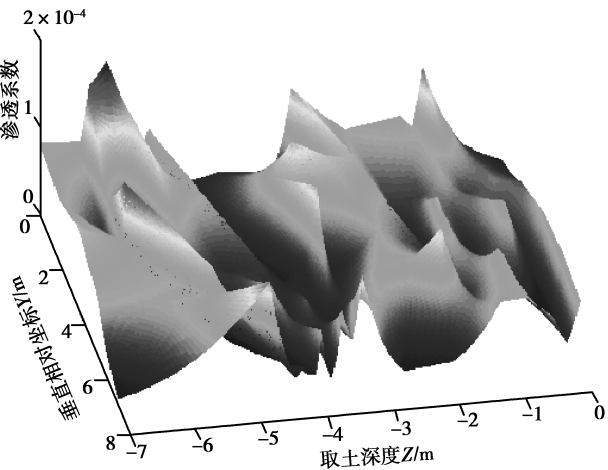
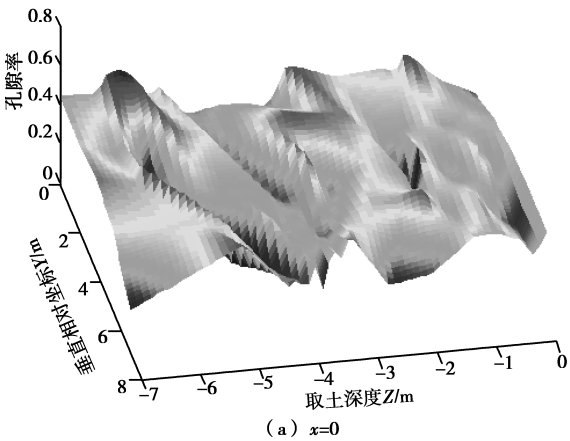


图 7 渗透系数随机分布剖面图

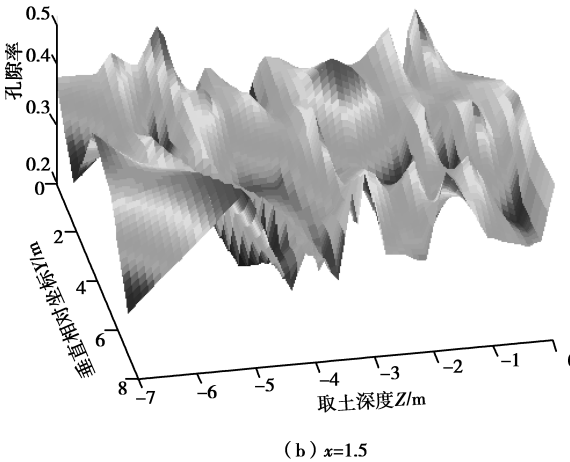
Fig. 7 Random distribution profile of permeability coefficient

3.3 三维非均质地层孔隙率剖面

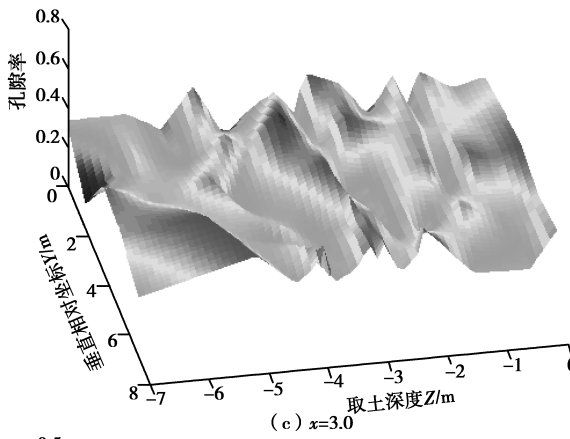
结合一维随机中点算法和二维 Diamond-Square 随机分形算法,分形维数取为 1.023,由分形维数 D 与赫斯特指数 H 之间的关系 $D=2-H$,得到赫斯特指数 $H=0.977$,原始数据的方差 σ 为 0.003 4。根据随机位移量 Δ_i 的计算公式(10),将式中高斯函数替换为 Weibull 随机数进行地形的三维随机模拟,得到该勘探区域内不同地质剖面 and 沿深度方向 $Z=0$ 、 -2 m 、 -4 m 和 -6 m 等不同地质深度的孔隙率分布,如图 8 所示。



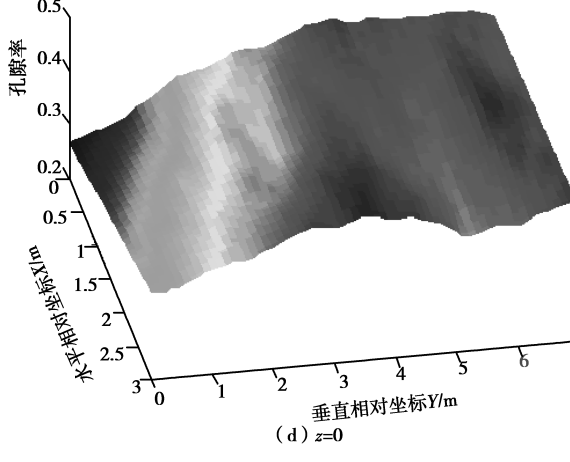
(a) $x=0$



(b) $x=1.5$



(c) $x=3.0$



(d) $z=0$

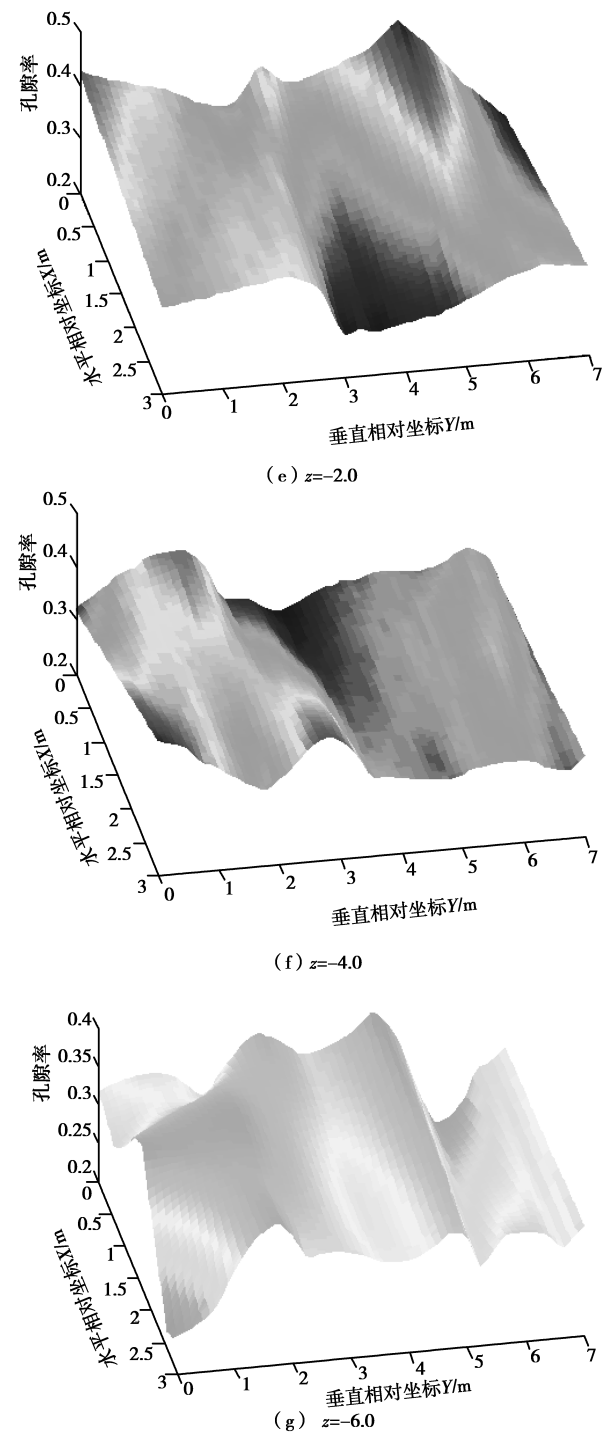


图 8 孔隙率三维分布剖面图

Fig. 8 Three-dimensional distribution profile of porosity

4 结论

土体物理力学性质参数是呈非均质性的,对研究区域地层孔隙率进行概率分布研究,采用概率纸法检验结果表明:研究区域土体孔隙率的非均质特征可以运用 Weibull 分布来进行描述,并采用拟合的方法得到相应的分布参数。

Monte-Carlo 模拟方法获得的土性参数值与实测值具有较高的吻合程度,表明该方法可用来描述地层孔隙率的分布。利用该方法完成了对研究区域孔隙率的非均质模拟。

结合分形插值算法和 Weibull 随机数确定了随机位移量 Δ_i 的计算公式,模拟了非均质地层的孔隙结构的分布规律,建立了基于随机分形插值的孔隙率的空间分布预测模型。

根据土性参数之间的相关性,探讨了以孔隙率为基本量,对渗透系数、弹性模量等基本物理参数在单元体中的赋值,形成二维地质剖面 and 三维数字地层,可对地层局部地质信息的变异和随机性进行精细化描述和预测。利用构建的非均质地层模型可以更好地反映注浆过程中浆液的分布范围和结石体的真实形态,完善注浆复合土体的加固设计理论。

参考文献 (References)

[1] 罗荣, 曾亚武. 岩石矿物细胞元随机性参数赋值方法研究[J]. 岩土力学, 2012, 33(7): 2221-2228. (Luo Rong, Zeng Yawu. Research on random parameter assignment method of rock mineral cell unit[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(7): 2221-2228. (in Chinese))

[2] 吴振君. 土体参数空间变异性模拟和土坡可靠度分析方法应用研究[D]. 北京: 中国科学院大学, 2009. (Wu Zhenjun. Study on spatial variability simulation of soil properties and practical reliability analysis method of soil slope[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2009. (in Chinese))

[3] Lumb P. The variability of natural soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1966, 3(2): 74-97.

[4] 尹宏锦. 非均质地层的宏观性质[J]. 石油学报, 1988, 9(2): 109-116. (Yin Hongjin. Macroscopic nature of heterogeneous formations[J]. Acta Petrolei Sinica, 1988, 9(2): 109-116. (in Chinese))

[5] 张贵金, 徐卫亚. 岩土工程参数多重相关性的度量[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(7): 1109-1113. (Zhang Guijin, Xu Weiya. Determination of multicorrelation for property parameters of geotechnical engineering materials[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(7): 1109-1113. (in Chinese))

- [6] Moh Z C, Chin C T, Liu C J, et al. Engineering correlations for soil deposits in Taipei [J]. Journal of Chinese Institute of Engineers, 1989, 12(3): 273-283.
- [7] 张春会, 赵全胜, 于永江. 考虑力学参数关联的非均质煤概率模型[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 564-622. (Zhang Chunhui, Zhao Quansheng, Yu Yongjiang. Probability model of heterogeneous coal considering correlation of mechanical parameters[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 564-622. (in Chinese))
- [8] Tang W H. Principles of probabilistic characterization of soil properties [M]. Bridge between Theory and Practice, Edited by David S B, ASCE, 1984.
- [9] Vanmarcke E H. Probabilistic modeling of soil profiles [J]. Journal of the Geotechnical Engineering, 1997, 103(11): 1227-1246.
- [10] Elishakoff I. Probabilistic methods in the theory of structure [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1983.
- [11] 罗晓辉, 卫军, 白世伟. 脆性统计损伤模型在岩土工程中的应用研究[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2004, 32(9): 82-85. (Luo Xiaohui, Wei Jun, Bai Shiwei. The application of brittleness statistical damage model to geotechnical engineering[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology. (Natural Science Edition), 2004, 32(9): 82-85. (in Chinese))
- [12] 郭红, 李波, 张博. 基于完全样本的两参数 Weibull 分布的参数估计[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2007, 41(3): 348-351. (Guo Hong, Li Bo, Zhang Bo. Parameter estimation of the 2-parameter Weibull distribution based on complete sample [J]. Journal of Huazhong Normal University (Natural Science Edition), 2007, 41(3): 348-351. (in Chinese))
- [13] 雷进生, 夏磊, 王乾峰, 等. 非均质地层地质剖面的随机预测模型[J]. 地下空间与工程学报, 2016, 12(1): 84-89. (Lei Jinsheng, Xia Lei, Wang Qianfeng, et al. Random Prediction Model of Geological Section for Non-homogeneous Formation [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2016, 12(1): 84-89. (in Chinese))
- [14] 廖秋林, 李晓, 朱万成, 等. 基于数码图像土石混合体结构建模及其力学结构效应的数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(1): 155-162. (Liao Qiulin, Li Xiao, Zhu Wancheng, et al. Structure model construction of rock and soil aggregate based on digital image technology and its numerical simulation on mechanical structure effects [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(1): 155-162. (in Chinese))
- [15] 丁秀丽, 李耀旭, 王新. 基于数字图像的土石混合体力学性质的颗粒流模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 477-484. (Ding Xiuli, Li Yaoxu, Wang Xin. Particle flow modeling mechanical properties of soil and rock mixtures based on digital image [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(3): 477-484. (in Chinese))
- [16] 宋来忠, 姜袁, 彭刚. 混凝土随机参数化骨料模型及加载的数值模拟[J]. 水利学报, 2010, 41(10): 1241-1247. (Song Laizhong, Jing Yuan, Peng Gang. Numerical simulation of concrete random parameterized aggregate model and load test [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2010, 41(10): 1241-1247. (in Chinese))
- [17] 丁秀丽, 张宏明, 黄书岭, 等. 基于细观数值试验的非饱和土石混合体力学特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(8): 1553-1566. (Ding Xiuli, Zhang Hongming, Huang Shuling, et al. Research on mechanical characteristics of unsaturated soil-rock mixture based on numerical experiments of mesostructure [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(8): 1553-1566. (in Chinese))
- [18] 杨继红, 刘汉东, 秦四清, 等. 考虑土性参数空间变异性的边坡可靠度分析[J]. 工程地质学报, 2007, 15(2): 205-211. (Yang Jihong, Liu Handong, Qin Siqing et al. Reliability analysis of slope stability taking into consideration of spatial variability of soil parameters [J]. Journal of Engineering Geology, 2007, 15(2): 205-211. (in Chinese))
- [19] 朱庆. 分形理论及其在数字地形分析和地面仿真中的应用[D]. 北京: 北方交通大学, 1995. (Zhu Qing. Fractal theory and its application in digital terrain analysis and ground simulation [D]. Beijing: Northern Jiaotong University, 1995. (in Chinese))